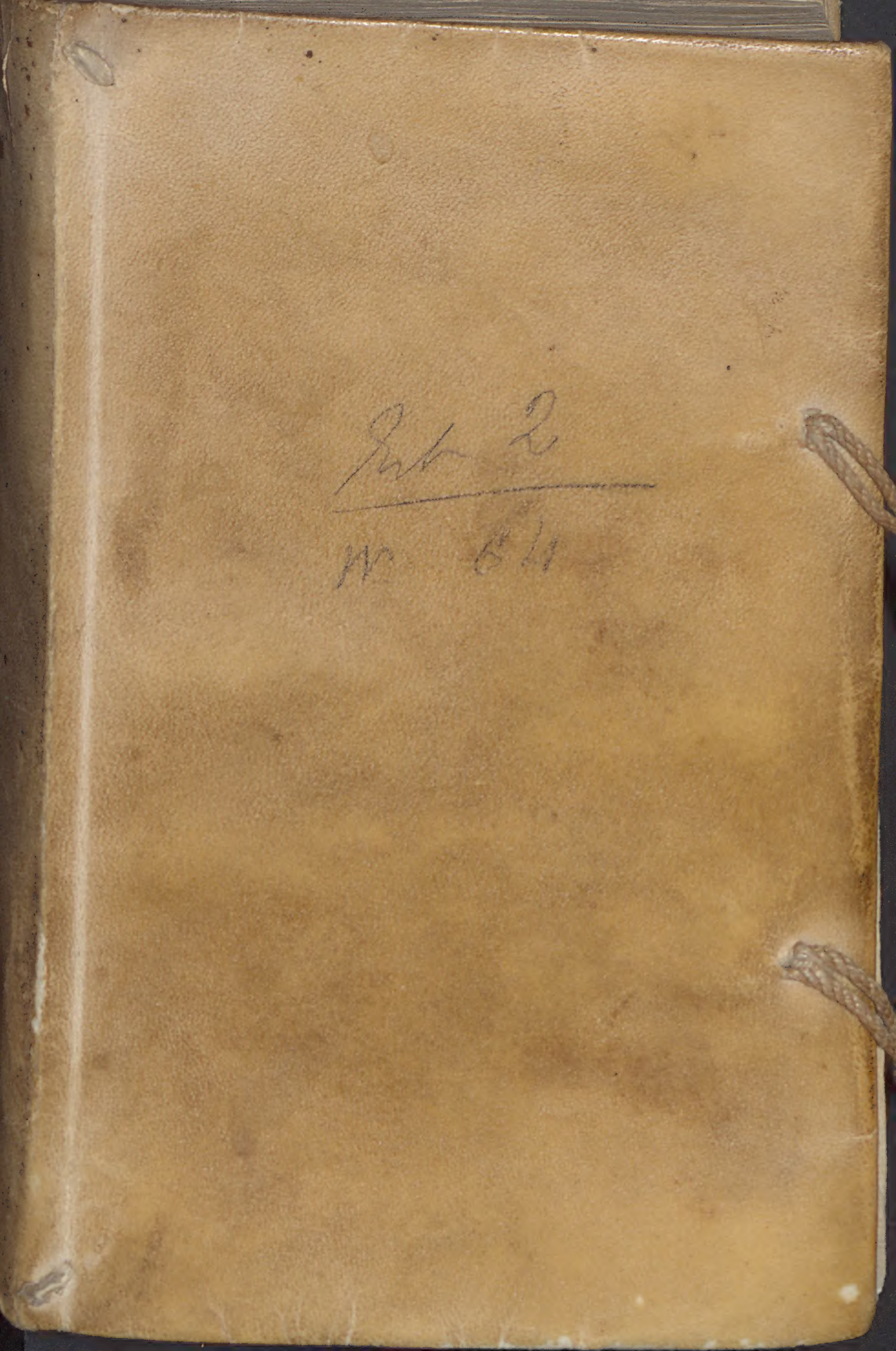
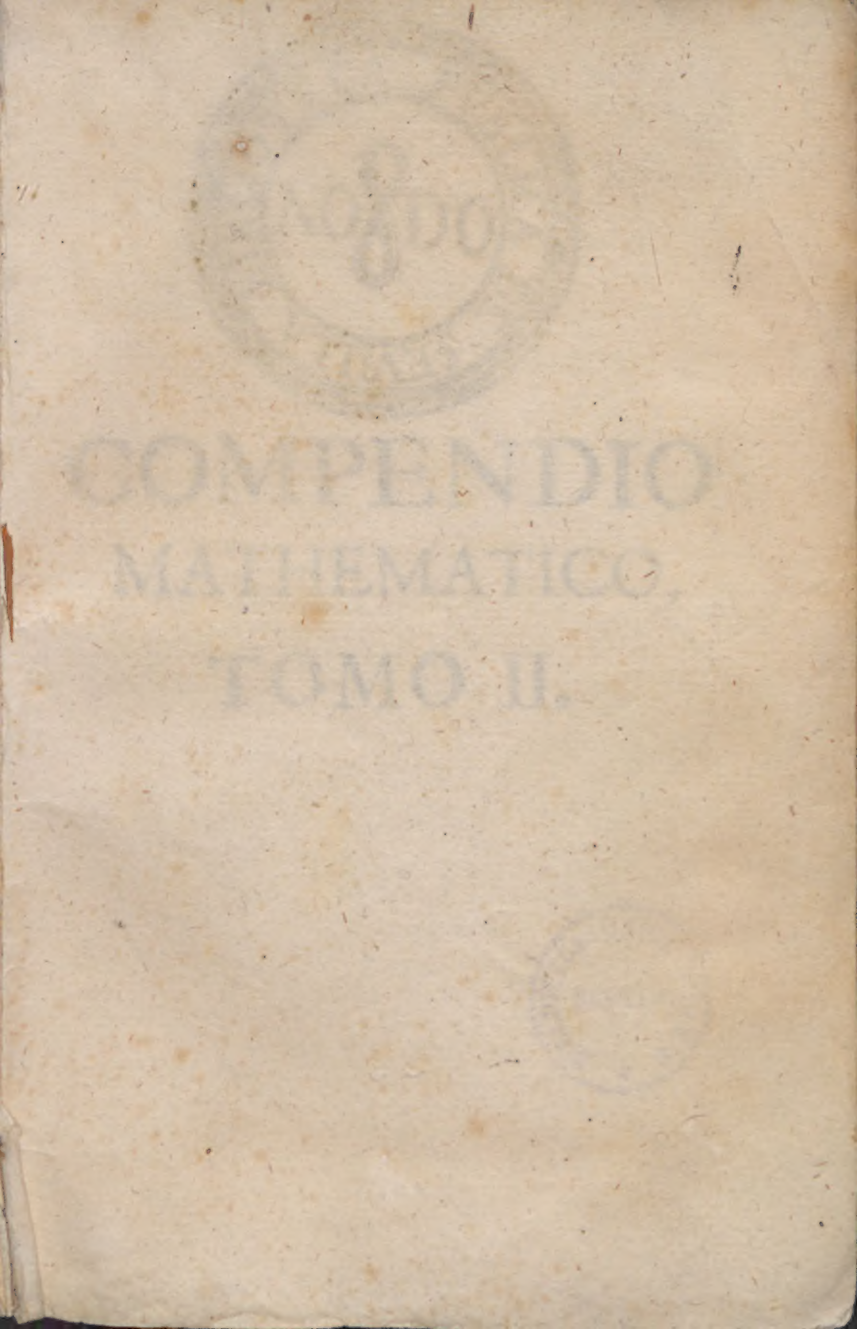




COMPENDIO
MATHEMATICO.
TOMO II.



COMPENDIO MATHEMATICO,

TOMO II.



COMPENDIO MATHEMATICO,

EN QUE SE CONTIENEN todas las materias mas principales de las Ciencias, que tratan de la Cantidad.

QUE COMPUSO EL DOCTOR THOMAS Vicente Tosca, Presbytero de la Congregacion del Oratorio de S. Felipe Neri de Valencia.

SEGUNDA IMPRESSION.

CORREGIDA, Y ENMENDADA DE muchos yerros de Impression, y Laminas, como lo verà el curioso.

DEDICADO AL EX.mo SEñOR CONDE DE ARANDA.

TOMO SEGUNDO.

Que comprehende (ARITHMETICA SUPERIOR. ALGEBRA. MUSICA.

CON PRIVILEGIO.

En Madrid: En la Imprenta de Antonio Marin. Año 1727.

Se hallarà en la Libreria de Juan de Moya, frente de las Gradas de S. Felipe; y en Casa de D. Jayme Marquès, vive en el Santo, y Real Monte de Piedad de esta Corte.

APROBACION DEL SEñOR Doctor D. Joseph Fernandez de Marmanillo, Presbytero de la Congregacion del Oratorio de S. Felipe Neri, Secretario del Santo Oficio, y Examinador Synodal de este Arçobispado de Valencia, y del Obispado de Tortosa.

DE comission del señor Don Francisco Fernandez Maquilon, Presbytero, Doctor en ambos Derechos; y por el Ilustrisimo, y Reverendissimo Señor Don Fray Antonio Folch de Cardona, por la gracia de Dios, y de la Santa Sede Apostolica, Arçobispo de Valencia, del Consejo de su Magestad, &c. Oficial, y Vicario General, he visto el segundo Tomo del Curso, ò Compendio Mathematico, que ha compuesto el R. P. Doctor Thomàs Vicente Tosca, Presbytero de nuestra Congregacion del Oratorio; y aunque con el nombre solo de Autor tan versado en todo genero de Ciencias, assi naturales, como sagradas, llevaria consigo quanta recomendacion pudiera desear la luz publica, no obstante, cumpliendo con el encargo de Censor (si acaso cabe este Oficio en quien haze profession de Discipulo de tan gran Maestro) debo dezir, que la misma obra se la merece, no solo por no hallarse en ella sentencia, ni palabra que desdiga de nuestra Santa Fè, y buenas costumbres, sì por

la

la Methodica ordenacion, que ſe reconoce en todas ſus partes, por la concatenacion conſequente de ſus Theoremas, por la ſolidèz ingenioſa de ſus demonſtraciones, y por la ſuma claridad de ſu eſtilo; y que aviendo logrado en eſte Tomo con felicidad dos coſas, es à ſaber, el hazer tratable à qualquiera mediana aplicacion, por lo facil, lo mas abſtracto, y obſtruſo de las Mathematicas, que es la Algebra; y digno de qualquier ſublime ingenio por lo cientìfico, lo mas practico, y vulgar de ellas, que es la Muſica, ſe puede prometer, con la pùblica vtilidad que el Autor intenta en todos ſus eſtudios, la aceptacion, y aplauſo vniverſal del Orbe literario. Aſsi lo ſiento (ſalvo ſemper, &c.) en la Real Caſa de la Congregacion del Oratorio de Valencia à 2. de Febrero de 1709.

Doct. D. Joſeph Fernandez de Marmanillo.

Imprimatur,
Doct. Maquilòn,
Vic. Gen.

Imprimatur,
D. Rodrigo de Zepeda y Caſtro.

TRA-

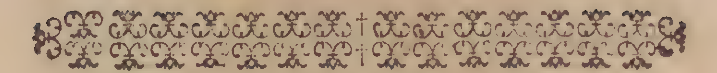


TRATADO IV. DE LA ARITHMETICA SUPERIOR.



ENTRE las Ciencias que proceden con mayor abstraccion, y sutileza, no tiene el infimo lugar esta Segunda Parte de la Arithmetica, à quien con razon llamo *Superior*, por levantarse tanto sobre la explicada en el Tratado 2. que desde su elevada altura llega à descubrir los campos mas dilatados de la Mathematica: no es inaccessible, aunque tan excelsa su cumbre, para quien tiene alguna aplicacion al trabajo, y mas quando han abierto mas faciles, y breves sendas los Autores modernos, que ingeniosamente han ilustrado esta materia: por ellas procurarè conducir à mi Lector, atajando los cansados rodeos de los Antiguos.

Trata esta Arithmetica Superior de las Potestades numericas: considera su naturaleza, y propriedades: averigua su composicion; passando vltimamente à su resolucion, y extraccion de las raizes que las formaron; de que se colige ser verdaderamente Ciencia Analytica, ò resolutiva.



LIBRO I.

DE LA COMPOSICION, Y NATURALEZA de las Poteſtades numericas.

ES conſtante en buena Philoſophia la mutua correſpondencia de la *Syntheſi, y Analyſi*, ù de la compoſicion, y reſolucion en todas las coſas. Reſuelveſe el compueſto natural en materia, y forma, que ſon ſus intrinſecos principios; como tambien qualquiera mixto, en los elementos que le forman: ni ay fabrica, que reſuelta, ò deshecha, ſea mas que los maderos, y piedras, que con artificioſa trabazòn la componian: Siendo, pues, qualquiera Poteſtad numerica vn todo, que compuſo la Arte, llamada *Synthetica*, ò *Compoſitiva*, razon ſerà preſuponer la noticia de ſu fabrica, para comprehender deſpues el fundamento de la *Arte Analytica*, que la reſuelve.

DEFINICIONES.

1 *POteſtad, ò Potencia de vn numero, es qualquiera producto de los que ſalen de la multiplicacion continua de dicho numero por sì miſmo.*

Explicacion. Aſsi como *Potencia de vna linea*, es el quadrado, que ſe forma, ò puede formar de ella: y *Potencia de dos lineas*, es el paralelogramo rectangulo, que ſe forma, ò puede formar de ellas: como conſta de la Defin. 1. del lib. 2. Eucl. Aſsi tambien *Potencia de vn numero*, es el producto que reſulta, multiplicandole vna, ò muchas vezes por sì miſmo: y *Potencia de dos, ò mas numeros*, es el producto que ſale de la continua multiplicacion de ellos entre si: como la potencia de 2. 3. es 6. Y la potencia de 2. 3. 4. es 24. por ſalir de la multiplicacion de los ſobredichos numeros

ros. Pero *Potencia numerica*, propriamente es el producto de la multiplicacion del numero vna, ò muchas vezes por sì mismo; y assi el 4. es potencia del 2. por salir de la multiplicacion de 2. por 2. Tambien 8. es potencia del mismo 2. porque 2. vezes 2. hazen 4. y dos vezes 4. hazen 8. y assi en los demàs.

2. *Raiz numerica es el numero, de cuya multiplicacion nacen las Potestades numericas.*

Explicacion. Puedense llamar raìzes de vn numero aquellos, de cuya multiplicacion resulta; y assi, por proceder el numero 24. de la multiplicacion de 6. por 4. se pueden llamar el 6. y el 4. sus raizes: pero absoluta, y propriamente se llaman *raìzes numericas* aquellos numeros, que multiplicados vna, ò muchas vezes, por sì mismos producen las Potestades. Sean los numeros 2. 4. 8. 16. porque 2. multiplicandose a sì mismo produce 4. el 4. es potestad del 2. y el 2. es su raiz: tambien, porque 4. multiplicado por el mismo 2. haze 8. es el 8. potestad del 2. y este su raiz: y porque 8. multiplicado por 2. produce 16. es tambien el 16. potestad del 2. y este su raiz, &c. De que se colige, que la raiz, y sus potestades componen vna progression Geometrica, cuyo denominador es la raiz; y por consiguiente todos los terminos tienen entre sì la misma razon, que la raìz con la vnidad. Coligese tambien, que las potestades de qualquiera raiz pueden ser infinitas, como los terminos de la progression Geometrica.

A cada vna de las potestades suelen poner su proprio nombre los Authores, y la expressan con especial caracter, como se puede ver en sus obras. Solo propondrè aqui los nombres mas proprios de las potestades mas frequentes; y los caracteres mas faciles, y claros con que se notan todas, escusando en esto, como en lo demas, muchos terminos, que por extravagantes, mas sirven de confusion que de provecho.

Escrivase la progression Geometrica, formada de la raiz, y sus potestades; y sobre cada termino vna misma letra del Abecedario, juntamente con los terminos de la progression Arithmetica natural, colocandoles successivamente al lado de cada letra, en la forma siguiente.

Progres.Arithm.		a1.	a2.	a3.	a4.	a5.	a6.	a7.
Progres.Geometr.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.

Los numeros de la progression Arithmetica sirven para declarar los terminos de la Geometrica, cada vno à su correspondiente; y por esta causa se llaman *Exponentes*. La letra se pone como señal indiferente, para significar qualesquiera numeros; pues assi como en el exemplo propuesto significa los terminos 2. 4. 8. &c. que proceden en razon dupla; assi podian significar los terminos 3. 9. 27. que se continuan en tripla; y assi de otra qualquiera serie, o progression. Las letras, pues, con los exponentes, significan tanto la raìz, como sus potestades: y assi a1. ò b1. &c. significa la raìz a2. b2. &c. significa la potestad segunda, que aunque en rigor es la primera; pero con muchos Authores la llamarè *Potestad segunda*, por la mayor facilidad que resulta de ajustar el nombre de cada potestad al lugar que tiene en la progression, y que expressa su exponente: assimismo a3, ò b3. &c. significarà la potestad tercera: a4. b4. la quarta, &c.

3. En la progression Geometrica sobredicha, y otra qualquiera, el primer termino despues de la vnidad, se llama *Raìz*, *ò Lado*, como arriba dixe: su caracter es. a1. b1. x1. &c. suelese omitir regularmente la vnidad, porque estando sola la letra, yà se entiende significa vna raìz.

4. La segunda potestad que en la progression sigue à la raìz, se llama *Quadrado*; y nace de la multiplicacion de vn numero por sì mismo; y este se llama su *Raìz quadrada*; como el 4. es quadrado del 2. y este raìz quadrada de 4. su caracter es a2. b2. &c. Suelese tambien llamar *Plano*, como tambien qualquiera otro producto, quando se imagina proceder de la multiplicacion de dòs numeros, como despues dirè.

5. La tercera potestad se llama *Cubo*; nace de la multiplicacion del quadrado por su raìz, ù de la multiplicacion continua de vn mismo numero tomado tres vezes, que es lo mismo; y este numero, de cuya multiplicacion procede, se llama *Raìz cubica*; como 8. es el cubo de 2. por proceder de la multiplicacion de 4. quadrado de 2. por el mis-

mo

mo 2. ò por ſalir de la multiplicacion continua de 2. 2. 2. diziendo, dos vezes dos ſon 4. y 2. vezes 4. ſon 8. y el 2. ſe llama *Raìz cubica* del 8. El miſmo cubo ſe llama tambien *ſolido*, como tambien qualquiera numero, que ſe conſidera ſalir de la multiplicacion de tres numeros.

6. La quarta poteſtad ſe llama *Quadrado—quadrado*, ò *Plano—plano*; ſe origina de la multiplicacion del cubo por la raiz; ù del quadrado por si miſmo, de ſuerte, que viene à ſer quadrado del quadrado; ò tambien de la multiplicacion continua de qualquier numero tomado 4. vezes; como es el 16. reſpecto del 2. que es ſu raìz *Quadrado—quadrada*; ſu caracter es a4.b4.&c.

7. La quinta poteſtad ſe llama comunmente *Quadrado-cubo*; *Plano—ſolido*; *ſuper—ſolido*; *y primo relato*: nace de la multiplicacion del quadrado—quadrado por la raìz: declaraſe con eſte caracter a5.b5.&c.

8. La ſexta poteſtad ſe llama *Cubo—cubo*, ò *Solido—ſolido*; y ſe expreſſa aſsi, a6.b6.&c. La ſeptima ſuele llamarſe, *Superſolido ſegundo*, ò *ſegundo relato*, y *quadrado—quadrado--cubo*; y es ſu caracter a7. b7. &c. de aqui ſe puede colegir la denominacion de las demas poteſtades; y para evitar confuſion, es mas conveniente nombrarlas con el nombre de *Poteſtad tercera*, ò *quarta*, &c. ſegun fuere ſu exponente. Veaſe lo dicho en la Tabla ſiguiente.

Tabla de las poteſtades numericas.

Poteſt.			Caract.
1.			
2.	Raìz.	Lado.	a1.
4.	Quadrado.	Plano.	a2.
8.	Cubo.	Solido.	a3.
16.	Quadr.—quadr.	Plano-plano.	a4.
32.	Quadr.—cubo.	Plano-ſolido.	a5.
64.	Cubo-—cubo.	Solido-ſolido.	a6.
128.	Quadr.-quadr.-cubo.	Plano-plano-ſolido.	a7.
256.	Quadr.-cubo.-cubo.	Plano-ſolido-ſolido.	a8.
512.	Cubo-—cubo-cubo.	Solido-ſolid-ſolido.	a9.
&c.	&c.	&c.	&c.

Coligeſe de lo dicho, que vn miſmo numero es raiz

quadrada, respecto de su quadrado: y raiz cubica, respecto de su cubo; quadrado—quadrada, respecto de su quadrado—quadrado, &c. como en el exemplo propuesto el mismo 2. es raiz quadrada de 4. cubica de 8. &c.

Para notar la raiz de vn numero, vsarè muchas vezes de este señal √, añadiendo el exponente de la potestad, cuya fuere la raiz; como para escrivir *raiz quadrada de* 16. escrivirè √ 2. 16. para denotar *raiz cubica de* 64. pondrè √ 3. 64. y assi de los demàs; lo que serà necessario en muchos casos, como se verà en este, y el siguiente Tratado; y siempre que se hallare el signo √ sin exponente, se entenderà significar *raiz quadrada*.

Buelvo à advertir lo que otras vezes he dicho, que este señal + significa *Mas*; y este — significa *Menos*: del primero vsarèmos quando vna quantidad se ha de juntar con otra, ò afirmar de ella; y del segundo, quando vna cantidad se ha de quitàr, ò negar de otra; y por esta causa el señal + se llama *Afirmativo*; y la cantidad que se le sigue, se dize *Afirmada*: y el otro señal — se llama *Negativo*; y la cantidad que se le sigue, se dize *Negada*. Usarèmos tambien de este señal ⏜ para denotar la igualdad de dos cantidades: y assi, 8. — 2. ⏜ 6. quiere decir, *ocho menos dos es igual à* 6. como tambien 4. + 2. ⏜ 6. *quatro mas dos igual à* 6.

9. Las potestades, ò son *simples*, ò *compuestas*: potestades *simples*, son las que no tienen composicion de otras, ù de la misma, ù de diferente especie; como 1. a1.1.x3. &c. *compuestas* son las que se componen de muchas de la misma, ù de diferente especie; como 20.a2. veinte quadrados; 1.a2. + 1. a3. vn quadrado mas vn cubo: de estas vltimas ay otras especies, que se explicaràn en su lugar.

10. Dividense tambien las potestades en *racionales*, è *irracionales*, ò *sordas*: Potestades *racionales* son aquellas, que tienen raiz justa, que se puede explicar con numero; como 9. cuya raiz quadrada justa es 3. y esta se llama tambien *raiz racional*: Potestades *irracionales*, ò *sordas* son las que carecen de raiz justa, que se pueda explicar con numeros; como 32. que no tiene raiz quadrada justa, que se pueda ex-

explicar con numero; y asi solo se expressa con este caracter $\sqrt{2}.32.$ que quiere dezir, *raiz quadrada de* 32. y estas raizes tambien se llaman *sordas, è irracionales*, como sus potestades.

11. *Numero plano*, es el producto de la multiplicacion de dos numeros, como el 10. que proviene de la multiplicacion de 5. por 2. y estos numeros 5. y 2. se llaman *lados* de dicho numero plano; à imitacion de la cantidad continua, en la qual el rectangulo formado de dos lineas; la vna de 5. palmos; y la otra de 2. es vn plano, cuyos lados son dichas lineas.

12. *Numero solido*, es el producto de la multiplicacion continua de tres numeros, los quales se llaman *lados*, como el 24. que nace de la multiplicacion de los numeros 2. 3. 4. diziendo, dos vezes 3. son 6. y 4. vezes 6. son 24. y estos tres numeros se llaman sus *lados*, à semejança de la figura Geometrica, que se forma de tres lineas, ò lados, sirviendole vno de longitud, otro de latitud, y otro de altura, ò profundidad.

Advierto aqui lo primero, que vn mismo numero plano puede tener diferentes lados, porque puede provenir de la multiplicacion de diferentes numeros; como 12. que puede provenir de la multiplicacion de 6. por 2. y de 4. por 3. tambien vn mismo solido puede tener diferentes lados, porque puede nacer de la multiplicacion de tres nùmeros diferentes; y de otros tres, como 48. que nace de 2.4.6. y tambien de 2. 3. 8.

Advierto lo segundo, que vn mismo numero solido, puede ser plano; y al contrario, como el dicho numero 24. que es solido, en quanto proviene de la multiplicacion de los tres 2. 3. 4. es tambien plano, en quanto resulta de la multiplicacion de 6. por 4.

13 *Numeros planos, ò solidos semejantes*, son aquellos, cuyos lados son proporcionales, como 6. y 24. son numeros planos semejantes, porque 2. 3. lados del primero, son proporcionales con 4. 6. lados del segundo; assimismo 24. y 192. son solidos semejantes, porque 2. 3. 4. que son lados del primero, son proporcionales con 4. 6. 8. que son lados del segundo.

Aqui ſe debe advertir, que para que los numeros planos, ò ſolidos ſean ſemejantes, no es meneſter que qualeſquiera lados de vno ſean proporcionales con qualeſquiera del otro, sì que baſta que lo ſean algunos; y aſsi los numeros 15. 60. ſon planos ſemejantes; porque aunque los lados 3. 5. y 5. 12. no ſean proporcionales, pero lo ſon eſtos otros 3. 5. y 6. 10.

CAPITULO I.

EXPLICANSE LOS THEOREMAS FUNDAMENTALES de las Poteſtades numericas.

PAra la perfecta inteligencia de la naturaleza, y propriedades de las Poteſtades numericas, ſe neceſsita de los ſiguientes Theoremas, caſi todos ſacados del lib. 8. de los Elementos de Euclides, los quales ſerviràn tambien para demonſtrar las operaciones con que ſe reſuelven dichas Poteſtades, y ſe ſacan ſus raizes. Quien ſe contentare con ſola la practica podrà omitir lo contenido en eſte capitulo, y paſſar al que deſpues ſe ſigue.

Advierto aora lo primero, que para mayor brevedad, y claridad notarè ordinariamente los numeros con letras, y para expreſſar el producto de dos, ò mas numeros, juntarè las letras que les ſignifican, vna al lado de otra, como ſi noto al numero 3. con A, y al 4. con B, AB ſerà el producto 12. de dichos numeros.

Advierto lo ſegundo, que como dixe en la Defin. 13. del lib. 5. de la Geometria Elementar, el modo de formar vna razon compueſta de otras qualeſquiera razones, conſiſte en diſponer las razones dadas en forma de quebrados, poniendo los antecedentes ſobre la raya, como numeradores; y los conſequentes debaxo, como denominadores; y multiplicando continuamente los numeradores; y aſsimiſmo los denominadores, el producto ſerà vn quebrado, cuyos terminos expreſſan la razon compueſta de la razones dadas. *Exemplo.* Sean las cantidades 8. 3. 6. 4. como di-

dixe en el lugar citado, el 8. al 4. tiene razon compuesta de las de 8. à 3. de 3. à 6. y de 6. à 4. Dispónganse estas razones en forma de quebrados, segun la regla dada, como se sigue:

$$\frac{8}{3}\quad\frac{3}{6}\quad\frac{6}{4}\quad\frac{144.}{72.}$$

Y haziendo la multiplicacion sobredicha, serà el producto el vltimo quebrado, y la razon de 144. à 72. serà compuesta de las razones dadas; como la de 8. à 4. su igual.

De aqui se colige, que el producto de los antecedentes de qualesquiera razones dadas; tiene con el producto de los consequentes de las mismas razones, razon compuesta de todas las razones dadas.

PROP. I. Theorema.

Las magnitudes, ò productos de muchas dimensiones, que tienen algunos lados, ò raizes iguales, y otros desiguales, tienen entre sì la razon de los lados desiguales.

SEan las dos magnitudes *bc*, y *dc*, que tienen vna raìz, ò lado *c* igual. Digo, que tienen entre sì la razon de *b* à *d*, que son las desiguales; de suerte, que son proporcionales *bc*, *dc*::: *b*, *d*.

Demonstr. Como se colige de la Propos. 15. del lib. 5. de la Geom. Elem. y demuestra Euclides en la 17. del libro 7. Quando dos, ò mas magnitudes se multiplican por vna tercera magnitud, los productos tienen entre sì la razon misma de dichas magnitudes; siendo, pues, *bc*, y *dc*, productos de *b*, y *d* por *c*, tendràn entre sì la razon de *b* à *d*.

bc		*dc.*
12		6.
b	*c*	*d.*
4	3	2.

Assimismo estos dos productos *bbc*, y *dbc*, tienen entre sì la razon de *b*, à *d*, por ser productos de la multiplicacion de *b*, y *d*, por vna misma magnitud *bc*. Son, pues, proporcionales *bbc*, *dbc*:::*b*, *d*.

PROP. II. Theorema.

El producto de dos magnitudes, es medio proporcional entre los quadrados de las mismas magnitudes.

SEan las dos magnitudes *b*, y *d*; el producto de ellas serà *bd*: el quadrado de *b*; ò producto de *b* por *b*, serà *bb*, y el de *d*, serà *dd*. Digo, que son proporcionales *bb*, *bd*, *dd*.

De-

b		*d.*
2		3.
bb	*bd*	*dd*
4	6	9.

Demonstr. [1.] *bb* à *bd*, es como *b* à *d*; assimismo *bd* à *dd*, es como *b* à *d*: luego la misma razon ay de *bb* à *bd*, que de *bd* à *dd*: luego *bd*, es medio proporcional entre *bb*, y *dd*.

PROP. III. Problema.

Hallar quantos numeros se quisieren continuamente proporcionales, minimos en una razon dada.

PIdense primeramente tres numeros en la razon de *b* à *d*, continuos proporcionales, y que sean los minimos que pueda aver en la dicha razon.

Operacion. Si los numeros *b*, *d*, no fueren los minimos en la razon dada, reduzganse à ellos por la Propos. 9. lib. 2. de la Arithm. Infer. hecho esto, multipliquese *b* por si mismo, y *d*, tambien por si mismo; y los productos *bb*, y *dd* seràn los estremos; multipliquese *b* por *d*, y el producto *bd* serà el medio, y seràn los tres continuos proporcionales *bb*, *bd*, *dd*, en la razon dada, como consta de la Propos. anteced.

b		*d.*	
2		3.	
bb	*bd*	*dd.*	
9	6	4.	
bbb	*bbd*	*bdd*	*ddd.*
27	18	12	8.

Que sean los tres minimos que puede aver en la dicha razon, se demuestra; porque siendo *b*, y *d* los minimos en aquella razon, seràn [24. 7. Eucl.] entre sì primos; y multiplicandose à sì mismos, seràn los productos *bb*, y *dd*, tambien entre sì primos: (27. 7. Eucl.) luego en los tres proporcionales *bb*, *bd*, *dd*, siendo los estremos entre si primos, seran los tres minimos en la razon dada. (1. 8. Eucl.)

2. Pidense quatro numeros continuos proporcionales, que guarden entre si la misma razon que *b* a *d*, y sean los minimos, que siendo quatro puedan continuar la sobredicha razon.

Operacion. Si *b*, y *d* no fueren los minimos en su razon, reduzganse à ellos; (*Propos. 9. lib. 2. Arith. Infer.*) y aviendo hallado, por la regla arriba dicha los tres *bb*, *bd*, *dd*, continuos proporcionales, y minimos en su razon, se multiplicaràn *bb*, y *bd* por *b*; y *bd*, y *dd*, por *d*, y saldran los quatro numeros *bbb*, *bbd*, *bdd*, *ddd*, que se desean. Del mismo modo se ha-

hallaràn quantos numeros se quisieren continuos proporcionales, y minimos en la razon dada. La demonstracion es la misma; y esta es la Prop. 2. lib. 8. de Eucl.

COROLARIO.

SI ay muchos numeros continuos proporcionales, y minimos en su razon, como 25. 15. 9. los estremos 25. y 9. son primos entre sì, que es la Prop. 3. del lib. 8. de Eucl. y si los continuos proporcionales, y minimos fueren tres, los estremos son numeros quadrados; si fueren quatro, los estremos son cubicos, si cinco, quadrado-quadrados, &c. consta de la misma operacion.

PROP. IV. Theorema.

Los numeros planos tienen entre sì la razon compuesta de sus lados.

SEan los dos numeros planos *bd*, y *cf*; digo, que tienen entre sì la razon compuesta de la razon de *b* à *c*, y de la razon de *d* à *f*.

bd		*cf.*	
12		24.	
b	*d*	*c*	*f.*
3	4	2	12.

Demonstr. El primer plano *bd*, es vn producto de la multiplicacion de *b*, y *d*, que son los antecedentes de las razones de los lados; assimismo el segundo plano *cf*, es vn producto de la multiplicacion de *c*, y *f* consequentes de dichas razones; luego *bd* tiene con *cf* razon compuesta de *b* à *c*; y de *d* à *f*, segun la advertencia segunda.

PROP. V. Theorema.

Los numeros planos semejantes tienen entre sì la razon duplicada de sus lados homologos.

LOs numeros *ab*, *cd* son planos semejantes: Digo, tienen entre sì la razon duplicada de la razon de *a* à *c*; ù de *b* à *d*, que son sus lados homologos.

ab			*cd.*	
12			48.	
a	*b*	::	*c*	*d.*
3	4		6	8.

Demonstr. Por ser numeros planos, tienen la razon compuesta de las razones de sus lados: (3.) las razones de estos son iguales por ser los numeros propuestos planos semejantes: [def. 3.] luego *ab*, y *cd*, tienen razon compuesta de dos razones iguales que ay entre sus lados, luego tienen razon duplicada de la de sus lados.

PROP.

PROP. VI. Theorema.

Los numeros quadrados tienen entre sì la razon duplicada de la de sus lados, ò raìzes.

LA razon es, porque los numeros quadrados son planos semejantes, cuyos lados proporcionales son las raizes, luego por lo demostrado, tienen razon duplicada de las raìzes. Eucl. 11. 8.

PROP. VII. Theorema.

Entre los numeros planos semejantes ay siempre vn medio proporcional; y si entre dos numeros ay vn medio proporcional, seràn planos semejantes.

SEan los numeros *ab*, *cd*, planos semejantes: Digo, que entre ellos ha de aver necessariamente vn medio proporcional: multipliquese *b* por *c*, y serà el producto *bc*.

ab	bc	cd.
12	24	48.

a	b	c	d.
3	4	6	8.

Demonstr. *ab*, tiene con *bc* la razon de *a* à *c*; tambien *bc* con *cd* tiene la razon de *b* à *d*; y siendo en todos los planos semejantes, la razon de *a* à *c*, la misma que la de *b* à *d*, serà *ab* con *bc*, como *bc* con *cd*; luego *bc* es medio proporcional: y por la misma razon, si entre los dos numeros *ab*, *cd*, ay vn medio proporcional *bc*, sus lados seràn proporcionales; y por consiguiente seràn planos semejantes.

COROLARIOS.

1. *DE lo dicho se infiere, que entre dos numeros quadrados siempre ha de aver vn medio proporcional, porque los quadrados son planos semejantes; y este medio serà siempre el producto de sus raìzes.* (2.) *Eucl.* 11. 8.

2. *Si tres numeros, como por exemplo 9. 18. 36. siendo continuos proporcionales, el primero fuere quadrado, tambien lo serà el vltimo; porque siendo proporcionales, avrà entre los estremos vn medio proporcional; luego los estremos por lo demonstrado seràn planos semejantes; y como el plano semejante à vn quadrado necessariamente sea otro numero quadrado, se sigue que si el primero 9. es quadrado, tambien lo serà el tercero 36.*

PROP.

PROP. VIII. Theorema.

Los planos semejantes tienen entre sì la razon de vn quadrado à otro quadrado.

SEan los numeros 8. y 18. dos planos semejantes: Digo, que tienen entre sì la razon de vn quadrado à otro quadrado.

Demonstr. Siendo, como se supone, planos semejantes, avrà entre ellos vn medio proporcional 12. y si estos tres terminos se reducen à los minimos que pueden conservar la misma proporcion, que son 4. 6. 9. el primero, y vltimo forçosamente han de ser quadrados, como demuestra Eucl. en el Corolario de la Prop. 2. del lib. 8. que es la 3. de este libro. Siendo, pues, 8. à 12. como 4. à 6. y 12. à 18. como 6. à 9. serà por igualdad ordenada 8. à 18. como el quadrado 4. al quadrado 9. Es la Prop. 26. lib. 8. de Eucl.

8	12	18.
4	6	9.

PROP. IX. Theorema.

Los numeros solidos tienen entre sì la razon compuesta de sus lados.

LOs numeros *bdc*: *fgh* son solidos: Digo, que el primero al segundo tiene razon compuesta de las tres razones de sus lados; esto es, de la razon de *b* à *f*, de la de *d* à *g*, y de la *c* à *h*.

Demonstr. *bdc* es producto de la multiplicacion de los antecedentes de las tres razones sobredichas, que son *b.d.c.* y el segundo es producto de la multiplicacion de los tres consequentes *f.g.h.* Luego (*advertencia* 2.) la razon de *bdc* à *fgh* es compuesta de las tres razones de los lados.

	bdc				*fgh.*	
	24				60.	
b	*d*	*c*	:	*f*	*g*	*h.*
2	3	4	:	3	4	5.

PROP. X. Theorema.

Los numeros solidos semejantes tienen entre sì la razon triplicada de sus lados homologos.

D*Emonstrac.* Por ser solidos semejantes tienen los lados proporcionales, (def. 3.) y por consiguiente las tres razones de sus lados son iguales: luego como [8.] tengan por ser solidos razon compuesta de las tres razones de sus la-

lados; tendràn por ser semejantes, la razon compuesta de las tres razones semejantes de sus lados, que (def. 14. lib. 5.) es razon triplicada.

PROP. XI. Theorema.

Los cubos tienen entre sì razon triplicada de la de sus raizes.

SE infiere de lo dicho, porque los cubos son solidos semejantes; luego tienen entre si razon triplicada de sus lados, ò raizes. Mas claro, el cubo *bbb*, ò $b3$. al cubo *ccc*, ò $c3$. tiene razon compuesta de las tres razones de *b* à *c*; de *b* à *c*; de *b* à *c*; pero estas son iguales: luego la razon de los cubos, compuesta de ellas, es triplicada, esto es, compuesta de tres razones iguales.

COROLARIO.

DE lo dicho se infiere por las mismas razones, que los quadrado-quadrados tienen entre sì razon compuesta de sus lados; y que esta es razon quadruplicada; y assi generalmente las demàs potestades de vn mismo genero tienen entre sì razon compuesta de sus lados; y esta es quintuplicada, ò sextuplicada, &c. segun fuere 5. ò 6. su exponente.

PROP. XII. Theorema.

En qualesquiera dos cubos, si se multiplica el quadrado de la raìz del primero por la raìz del segundo; y el quadrado de la raìz del segundo por la raiz del primero, los dos productos seràn medios proporcionales entre los cubos sobredichos.

SEan los dos cubos $b3$. y $c3$. ò *bbb*, y *ccc*, el producto del quadrado de la raìz *b* del primero, por la raiz *c* del segundo es *bbc*; y el producto del quadrado de la raiz del segundo por la raìz del primero es *ccb*: Digo, que estos productos son medios proporcionales entre los cubos; esto es, que son continuos proporcionales *bbb. bbc::ccb.ccc.*

Demonstr. Por la Prop. 1. son proporcionales, como en A; luego (11.5. Euc.) la misma razon ay de *bbb* a *bbc*, que de *bbc* à *ccb*; y de *ccb* à *ccc*; luego son continuos proporcionales *bbb. bbc :: ccb. ccc.*

A

bbb	*bbc*	:	*b*	*c*.
bbc	*ccb*	:	*b*	*c*.
ccb	*ccc*	:	*b*	*c*.

CO-

COROLARIOS.

1 *INfiereſe de lo dicho, que entre dos numeros cubos, ay dos medios proporcionales, que ſeràn ſiempre los productos ſobredichos.*

2. Entre dos quadrado-quadrados, ay tres medios proporcionales; y univerſalmente entre qualeſquiera dos poteſtades del miſmo genero ay tantos medios proporcionales, menos uno, quantas ay unidades en ſu exponente; como entre x5. yz5. ay quatro; entre x6. z6. ay cinco, &c. todo lo qual, ſe demueſtra facilmente con el miſmo eſtilo que ſe demonſtrò aver un medio proporcional entre dos quadrados, y dos entre dos cubos.

PROP. XIII. Theorema.

Entre dos numeros ſolidos ſemejantes, ay dos medios proporcionales; y ſi entre dos numeros ay dos medios proporcionales ſeràn ſolidos ſemejantes.

SEan los numeros ſolidos ſemejantes *abe*, *cdf*, cuyos lados ſon *a*,*b*,*e*, del primero; y *c*,*d*,*f*, del ſegundo: Digo lo primero, que entre dichos ſolidos ay dos medios proporcionales. Multipliquenſe los lados *b*, *e*, *c*, y aſsimiſmo los lados *e*,*c*,*d*, y ſeràn los productos *bec*, *ecd*. Digo, que eſtos productos ſon medios proporcionales entre los ſolidos dados.

abe	*bec*	*ecd*	*cdf*.
24.	48	96	192
a *b* *e*		*c* *d* *f*.	
2 3 4		4 6 8.	

Demonſtr. [1.] El ſolido *abe*, al ſolido *bec*, tiene la razon de *a* a *c*: el ſolido *bec* a *ecd*, tiene la razon de *b* à *d*; y el ſolido *ecd* à *cdf*, tiene la razon de *e* à *f*; y ſiendo la miſma razon la que ay de *a* à *c*, que de *b* a *d*, y que de *e* a *f*, tendrà el primer ſolido al ſegundo la miſma razon, que el ſegundo al tercero, y eſte al quarto: luego ſon quatro continuos proporcionales; y por conſiguiente *bec*, *ecd*, ſon medios proporcionales. Es la Prop. 18. lib. 8. de Eucl.

Digo lo ſegundo, que ſi entre dos numeros, como por exemplo *abe*, *cdf*, ay dos medios proporcionales, como ſon *bec*, *ecd*, los tales numeros ſeràn ſolidos ſemejantes.

Demonſtr. El primer numero al ſegundo, tiene la miſma razon que *a* à *c*, y el ſegundo al tercero la miſma que *b* à *d*, y el

y el tercero al quarto la misma que *e* à *f*; y siendo vna misma la razon del primero al segundo, que de este al tercero, y que de este al quarto; la misma razon serà la de *a* à *e*, que la de *b* à *d*, y de *e* à *f*, que son los lados homologos de los numeros solidos *abe*, *cdf*; luego, aviendo entre ellos dos medios proporcionales tendràn sus lados homologos proporcionales; luego (Def.13.) son solidos semejantes. Es la Prop.21. lib.8. de Eucl.

COROLARIO.

SI de quatro numeros continuos proporcionales, como 8.12.18. 27. el primero 8. fuere cubico, tambien lo serà el vltimo 27. La razon es, porque siendo continuos proporcionales, avrà dos medios; luego los estremos 8. y 27. son solidos semejantes, y como à vn cubo no aya otro solido semejante, sino otro cubo; si el primero 8. es cubo, tambien la serà el vltimo 27. Es la Prop.23. lib.8. Eucl.

PROP. XIV. Theorema.

Los numeros solidos semejantes, tienen entre sì la misma razon que vn cubo à otro cubo.

SEan dos solidos semejantes, por exemplo 10. y 80. Digo que tienen entre sì la misma razon que vn cubo à otro.

Demonstr. Por ser 10. y 80. solidos semejantes, ha de aver necessariamente entre ellos dos medios proporcionales [12.] que son 20. y 40. con que seràn continuos proporcionales 10. 20. 40. 80. y si estos terminos se reducen à los minimos que pueden conservar la misma proporcion, que son 1.2.4.8. serà el primero, y vltimo numero cubos, como demuestra Euclides en

10	20	40	80.
1	2	4	8.

el Corolario de la Prop.2. del lib.8. siendo, pues, 10. à 20. como 1. à 2. y 20. à 40. como 2. à 4. y 40. à 80. como 4. à 8. serà por igualdad ordenada 10. à 8. como 1. à 80. que son numeros cubos.

PROP. XV. Theorema.

Quando las magnitudes son proporcionales, tambien lo son sus quadrados, cubos, y todas las demàs Potestades, y al contrario.

DIgo, que siendo proporcionales las magnitudes *a*, *b*::*c*, *d*, tambien lo son sus Potestades.

De-

Demonstr. La razon de *aa* con *bb*, y la de *cc* con *dd*, son duplicadas de la razon de *a* con *b*, ù de la de *c* con *d*: La razon de *aaa* con *bbb*, y la de *ccc* con *ddd*, son triplicadas de la misma razon de *a* con *b*, y assi de las demàs potestades. Siendo, pues, como se supone, las razones de *a* con *b*, y de *c* con *d* iguales, tambien las compuestas de ellas seràn iguales: luego, siendo proporcionales las magnitudes, tambien lo son sus potestades.

$a2. \quad b2. :: c2. \quad d2.$
$a3. \quad b3. :: c3. \quad d3.$
$a4. \quad b4. :: c4. \quad d4.$

Con esto queda hecha patente la conversa de la Proposicion sobredicha, que es, que siendo proporcionales los quadrados, cubos, &c. de vnas magnitudes, tambien ellas seràn proporcionales, por tener ellas entre sì razon subduplicada, ò subtriplicada, &c. de vna misma razon.

COROLARIO.

LOS quadrados, cubos, y demàs potestades de los terminos de vna progression, forman tambien progression; porque, como se ha demonstrado, los quadrados, y los cubos, &c. de magnitudes proporcionales, son proporcionales; luego, siendo la proporcion de las magnitudes continua, tambien lo serà la de sus potestades, con que formaràn progression.

PROP. XVI. Theorema.

En qualquiera progression Geometrica, el quadrado del primer termino al quadrado del segundo, tiene la razon, que el primer termino al tercero: el cubo del primero al cubo del segundo tiene la razon que el primer termino al quarto; y assi por su orden las demàs potestades.

SEan continuas proporcionales las magnitudes *b*, *c*, *d*, *f*, &c. Digo, que *bb* con *cc*, es como *b* con *d*.

Demonstr. (6.) La razon de *bb* à *cc*, es duplicada de la razon de *b* à *c*; la razon de *b* à *d*, es tambien duplicada de la razon misma de *b* à *c*; (Def.14.lib.5.Eucl.) luego *bb* à *cc*, es como *b* à *d*: Digo tambien, que b3. à c3. tiene la razon que *b* à *f*, porque b3. à c3. tiene razon triplicada de la razon de *b* à *c*; [11.] y siendo la razon de *b* à *f*, triplicada de la

la de *b* à *c*, serà b3. à c3. como *b* à *f*; de la misma suerte se discurrirà en las demàs potestades.

PROP. XVII. Theorema.

Si dos magnitudes, cada vna de dos dimensiones, son iguales, las dos raizes de la primera seràn reciprocas à las dos de la segunda: esto es, que seràn aquellas, ò las medias, ò las estremas en vna proporcion de quatro terminos.

SEan *bf*, *cd* dos magnitudes iguales: Digo, que sus raìzes *b*, *f* de la primera, y *c*, *d* de la segunda son reciprocas: esto es, que *b* es à *c*, como *d* à *f*; la razon es, porque como demonstrè en la Prop. 2. lib. 4. de la Arith. Infer. siempre que en quatro magnitudes, el producto de los estremos es igual al de los medios, dichas magnitudes son proporcionales; siendo, pues, el producto *bf*, igual al producto *c d*, seràn proporcionales *b* à *c*, como *d* à *f*.

Otros muchos Theoremas se pueden demonstrar con el mismo estilo, que se omiten, por ser al presente bastantes los que se han demonstrado; de los demàs se demonstraràn los que fueren precisos en su caso, y lugar.

CAPITULO II.

DE LA COMPOSICION DE LAS POTESTADES numericas.

LAS Proposiciones siguientes, que explican la composicion de las Potestades numericas, son el fundamento de su Analysi, ò resolucion, como se verà despues.

PROP. XVIII. Theorema.

El numero, cuyo primer guarismo à la derecha del que lee, fuere 2. 3. 7. 8. no es quadrado que tenga raìz justa.

FUndase este Theorema en la misma operacion, con que se forma el quadrado numerico; porque como este

este se forma multiplicando la raiz numerica por sì misma; necessariamente ha de venir à la derecha el guarismo que resulta de vn numero digito multiplicado por si mismo; pero ninguno de estos, multiplicandose à si mismo puede dar los numeros sobredichos; porque 1. multiplicandose à sì dà 1. el 2. dà 4. el 3. da 9. el 4. produciendo 16. dà el vltimo 6. el 5. haziendo 25. da el vltimo 5. el 6. por producir 36. da el 6. el 7. haziendo 49. dà 9. el 8. produciendo 64. dà 4. y vltimamente él 9. produciendo 81. dà por vltimo 1. luego el vltimo guarismo de vn numero quadrado perfecto, solo puede ser 1. 4. 5. 6. 9. luego si dicho vltimo guarismo fuere 2. 3. 7. 8. no serà dicho numero quadrado justo.

PROP. XIX. Theorema.

Si el numero de vna potestad no consta de mas cifras, que ay vnidades en su exponente, no tendrà mas que vna cifra en su raiz; y si no tiene mas cifras, que vnidades tiene el duplo de su exponentè, no tendrà mas que dos en su raiz, &c. pero si passa de los terminos dichos, siempre tendrà vna mas.

EXplicacion. El exponente del quadrado es 2. Digo, pues, que si vn quadrado numerico consta de dos cifras, tiene vna cifra en su raiz, si de quatro, tiene dos; si de seis, tres, &c. pero si dicho quadrado consta de vna sola cifra, aunque no lleguen a dos, tiene vna en la raiz; y si tiene tres, aunque no llegan a quatro, tiene dos; y si tiene cinco, aunque no llegan a seis; tiene tres en la raiz. El cubo, por ser su exponente 3. si consta de tres cifras, tiene vna en la raiz; si de seis, tiene dos, &c. y si consta de vna, ù dos, aun sin llegar a tres, tiene vna; y si consta de quatro, ò cinco, aun sin llegar a seis, tiene dos; y assi en las demas potestades.

Demonstr. El numero 9. es el mayor de los que se expressan con vna sola cifra, su quadrado es 81. que consta de dos cifras; luego a solas dos cifras del quadrado, corresponde vna en su raiz. El numero menor de los que constan

tan de dos cifras es el 10. y su quadrado 100. tiene tres cifras; luego à tres cifras del quadrado, corresponden yà necessariamente dos en la raìz. Tambien el numero 99. es el mayor de los que se expressan con dos cifras solas, y su quadrado 9801. consta de quatro: luego à quatro cifras del quadrado, solo corresponden dos en su raiz. Assi se demonstrarà lo dicho en los demàs numeros, y potestades.

PROP. XX. Theorema.

El quadrado, cuyo lado està dividido en dos partes, se compone del quadrado de la parte primera: mas de dos rectangulos, ò productos de la parte primera por la segunda: mas de el quadrado de la parte segunda.

ESta Proposicion queda demonstrada, tanto por Geometria, como por numeros en la Prop. 4. del lib. 2. de la Geometria Elementar; y assi bastarà aora la siguiente explicacion en el numero 576. que es quadrado, cuyo lado total, ò raìz es 24. à que supongo dividida en dos partes 20. y 4. el quadrado de 20. es 400. los dos productos de 20. por 4. son 80. y 80. que sumados son 160. y el quadrado de 4. es 16. y todos sumados, hazen el quadrado total 576.

Quadrado del primer segmento.	400.
Dos planos de los segmentos.	160.
Quadrado del segundo segmento.	16.
Quadrado total.	576.

La verdad de este Theorema, y de los siguientes, se verà otra vez clarissimamente en el siguiente Tratado.

COROLARIO.

SI el lado de vn quadrado consta de tres partes, el quadrado de la primera: mas, dos rectangulos hechos de la primera por vn lado, y de la segunda, y tercera juntas por otro: mas, el quadrado de la segunda, y tercera juntas, integran el quadrado total, como consta de lo demonstrado: assimismo, el quadrado de la primera, y segunda partes juntas: mas, dos rectangulos de dichas partes,

tes, y la tercera: mas, el quadrado de la tercera componen el quadrado total por la misma razon.

PROP. XXI. Theorema.

Si à vn quadrado se le añade el duplo de su raìz, y vna vnidad, resulta el quadrado proximo mayor. Fig. 1.

LA verdad de este Theorema se vè claramente; porque si al quadrado 4. se le añade dos vezes su raìz 2. y vna vnidad, resulta 9. quadrado de 3. que es el proximo mayor, y assi de los demàs. Sea, pues, el quadrado AL, cuya raìz quadrada es AN. Digo, que si al quadrado AL se le añade dos vezes su raìz, y à mas de esso, la vnidad, resultarà el quadrado proximo mayor; esto es, resultarà vn quadrado, cuya raiz excederà à la del quadrado AL en sola la vnidad; supongase sea esta raiz AC, y perficionese el quadrado AB, como se vè en la figura.

Demonstr. Por estàr la linea AC dividida en N, serà (4. 2. Eucl.) el quadrado AB de la linea AC, igual à los quadrados de AN, y de NC; y à dos rectangulos ANC; y como NC, se suponga ser la vnidad, serà el quadrado AB, igual al quadrado de AN; à dos rectangulos de AN, y la vnidad [que es lo mismo que à dos raizes] y al quadrado de la vnidad, que es la misma vnidad: luego si al quadrado AL, cuya raìz es 2. se le añaden dos raìzes multiplicadas por la vnidad, que son CL, DL; y el quadrado LB de la vnidad, resultarà el quadrado AB, cuya raiz AC es tres; que es lo que se avia de demonstrar.

PROP. XXII. Theorema.

Si à vn numero quadrado se le quita el duplo de su raìz, menos la vnidad, resulta el quadrado proximo menor. Fig. 1.

LA verdad de este Theorema es tambien manifiesta, porque si de 9. se quita el duplo de su raìz 3. menos la

la vnidad; esto es, si se le quitan 5. restan 4. que es el quadrado proximo menor al 9. por exceder el lado del 9. al del 4. en sola la vnidad. Sea, pues, el quadrado AB, cuyo lado, ò raiz es AC: Digo, que si à dicho quadrado se le quita el duplo de su raiz menos la vnidad, resultarà el quadrado AL proximo menor.

Demonstr. El quadrado AB excede al quadrado AL en el gnomon MBN: este gnomon consta de tantos quadrados pequeños de la vnidad, quantos ay en AC, tomada dos vezes, menos vno: luego si se quitan tantas vnidades, quantas ay en el lado, ò raiz AC, menos vna, resultarà el numero quadrado AL proximo menor.

PROP. XXIII. Theorema.

Qualquiera quadrado numerico consta de tantos numeros impares de los que vienen en progression Arithmetica de la vnidad, quantas ay vnidades en su raiz. Fig. 1.

LA progression de los numeros impares es 1. 3. 5. 7. 9. Digo, pues, que porque 2. raiz de 4. consta de dos vnidades, su quadrado 4. consta de los dos primeros terminos de dicha progression 1. 3. y porque 3. tiene tres vnidades, su quadrado 9. consta de los tres terminos 1. 3. 5. que sumados hazen 9. y assi de los demas. Aunque se infiere bastantemente de lo dicho, lo demuestro en la forma siguiente.

Demonstr. Para que del quadrado AK de la vnidad se forme el quadrado de 2. que es AL proximo mayor, se ha de duplicar la raiz 1. y añadir la vnidad: (21.) luego el quadrado de la vnidad A , que es 1. y 3. que es el gnomon PLO, forman el quadrado de 2 que es AL: luego la suma de los dos primeros terminos 1. y 3. forman el quadrado de 2. que es 4. assimismo la suma de los tres primeros forman el quadrado AB de 3. porque si se suman el quadrado AK, 1. el gnomon PLO, 3. y el gnomon MBN, 5. resulta el quadrado AB, 9. y assi de los demas.

PROP.

PROP. XXIV. Theorema.

El cubo, cuyo lado, ò raiz està dividida en dos ſegmentos, ſe compone del cubo del primer ſegmento: mas, de tres ſolidos, ò productos hechos de la multiplicacion del quadrado del primer ſegmento por el ſegundo: mas, de otros tres ſolidos, ò productos nacidos de la multiplicacion del primer ſegmento, por el quadrado del ſegundo; y mas del cubo del ſegundo ſegmento. Fig. 2.

ESte Theorema, y los ſiguientes, ſe declaran con gran facilidad por los numeros, y caracteres; pero ſe demueſtran con ſuma dificultad por lineas, à cauſa de no poderſe expreſſar baſtantemente en el papel la multitud de planos, y ſolidos de que ſe componen eſtas poteſtades; y aſsi juzgo ſer mas conveniente hazer manifieſta ſu verdad con ſolos numeros; exceptando el preſente Theorema, que habla del cubo, cuyo fundamento Geometrico quiero inſinùar, para que à ſu ſemejança ſe colija la firmeza que tienen los demàs.

Sea el cubo 13824. cuya raiz 24. conſta de dos ſegmentos, que ſon 20. y 4. Digo, que eſte cubo ſe compone de los ſolidos dichos en la propueſta, que ſon los ſiguientes.

Cubo de 20. ſegmento primero.	8000.
Tres ſolidos, ò productos de 400. quadrado de 20. por 4. ſegmento ſegundo.	4800.
Tres ſolidos, ò productos de 16. quadrado de 4. por 20. ſegmento primero.	960.
Cubo de 4. ſegmento ſegundo.	64.
Cubo total.	13824

Demonſtr. Sea AI, lado total de vn cubo; y eſtè dicho lado dividido en dos ſegmentos AB, BI. La baſa de dicho cubo ſerà el quadrado AL, que [4.2. Eucl.] ſe compone del quadrado AC, del quadrado CL, y de los dos rectangulos iguales IC, DN: el cubo del ſegmento AB, es AH, cuya planta, ò ichnografia es el quadrado AC: ſobre el

rectangulo IC se ajusta vn solido, que tiene por basa dicho plano IC, y por altura la BF, el qual nace de la multiplicacion del quadrado BH, ò AF, por BI, segmento segundo, y como de estos solidos entren tres en el cubo total, vno ajustado al plano BH, y sobre IC; otro ajustado al plano DH, y sobre DN; y otro ajustado al plano EH, se sigue, que el cubo total, incluye al cubo AH, del segmento AB, y tres solidos hechos del quadrado AF, [que lo es del mismo segmento AB] y del otro segmento BI: A mas de esto, sobre el quadrado CL del segmento BI, se ajusta vn solido paralelepipedo, que tiene la altura CH; y por consiguiente, sale de la multiplicacion del quadrado CL, del segmento BI, por CH, ò su igual AB, segmento primero: de estos solidos tambien ay tres, vno que se ajusta sobre CL, y al lado CH, otro al lado FH, y otro al lado GH, en los vacios, que dexaron entre si los tres solidos primeros; y porque estos tres solidos segundos dexan arriba en correspondencia del quadrado CL, vn vacio, cuyas tres dimensiones son iguales à CK, ò BI, se ajustarà en dicho vacio el cubo de BI; y con esto quedarà formado enteramente el cubo total de los solidos siguientes: del cubo de AB, de tres solidos de AF, BI; de otros tres de CL, y CH, ò AB; y del cubo de BI, que es lo que se avia de demonstrar.

PROP. XXV. Theorema.

El quadrado-quadrado, cuyo lado està dividido en dos segmentos, se compone del quadrado-quadrado del segmento primero: mas, del quadruplo del cubo del segmento primero, multiplicado por el segmento segundo: mas, del quadrado del segmento segundo, multiplicado por el sextuplo del quadrado del segmento primero: mas, del cubo del segmento segundo multiplicado por el quadruplo del lado primero: mas, del quadrado-quadrado del lado segundo.

Estos Problemas, causan confusion en lo abstracto de la propuesta; pero les haze faciles la explicacion siguiente. Sea el quadrado-quadrado total 331776. cuya raiz, ò lado es 24. que consta de dos segmentos 20. y 4.

Digo,

Digo, que ſe compone de los ſolidos ſiguientes.

Quadrado-quadr. de 20. ſegmento primero.	160000
Quadruplo del cubo del ſegmento primero por el ſegmento ſegundo.	128000
Quadrado del ſegmento ſegundo por el ſextuplo del quadrado del ſegmento primero.	38400
Cubo del ſegmento ſegundo por el quadruplo del ſegmento primero.	5120
Quadrado-quadrado del ſegm. ſegundo.	256
Quadrado-quadrado total.	331776

PROP. XXVI. Theorema.

El ſuperſolido, ò quinta poteſtad, cuya raiz, ò lado, ſe compone de dos ſegmentos, conſta del ſuperſolido del ſegmento primero: mas, del ſegmento ſegundo, multiplicado por el quintuplo del quadrado-quadrado del ſegmento primero: mas, del quadrado del ſegmento ſegundo, multiplicado por el decuplo del cubo del ſegmento primero: mas, del cubo del ſegmento ſegundo, multiplicado por el decuplo del quadrado del ſegmento primero: mas, del quadrado-quadrado del ſegmento ſegundo, multiplicado por el quintuplo del ſegmento primero: mas, del ſuperſolido del ſegmento ſegundo.

SEa el ſuperſolido, ò quinta poteſtad 7962624. cuya raiz, ò lado 24. conſta de dos ſegmentos 20. y 4. Digo, que ſe compone de los ſolidos, ò productos ſiguientes.

Superſolido del ſegmento primero.	3200000
Segmenro ſegundo por el quintuplo del quadrado-quadrado del ſegmento primero.	3200000
Quadrado del ſegmento ſegundo por el decuplo cubo del ſegmento primero.	1280000
Cubo del ſegmento ſegundo por el decuplo del quadrado del ſegmento primero.	256000
Quadr-quadrado del ſegmento ſegundo por el quintuplo del ſegmento primero.	25600
Superſolido del ſegmento ſegundo.	1024
Superſolido total.	7962624

De

De esta misma suerte se puede demonstrar la composicion de las demàs Potestades ; pero seria nunca acabar proseguirlas todas, por ser infinitas: basta, pues, lo demonstrado, para que conste la firmeza del fundamento, en que estrivan las reglas de su resolucion , que explico en el Libro siguiente ; pero quiero añadir aora la Proposicion que se sigue , en que se dà vna regla general , y facil para conocer, y explicar los planos , y solidos de que se compone qualquiera potestad.

PROP. XXVII. Problema.

Determinar los planos , y solidos de que se compone qualquiera potestad.

EN la Tabla segunda, que juntamente con otras se halla despues de la Prop. 1. del libro siguiente, busquese el caracter proprio de la potestad , cuya composicion se desea saber , el qual se hallarà en la infima linea transversal : sobre el caracter hallado se verà vna columna de numeros: trasladense estos numeros con el mismo orden ; y para mayor claridad , añadase vna vnidad arriba , y otra abaxo : al lado de cada numero se escrivirà vna a , menos à la vnidad de abaxo : añadase asimismo al lado de la a vna b : menos à la que corresponde à la vnidad de arriba : à estas letras se añadiràn los terminos de la progression natural Arithmetica , que comiença de la vnidad ; pero con esta diferencia, que la que se escriviere al lado de a , empieze de baxo para arriba ; y la que al lado de b , desciende de arriba à baxo: hecho esto , se explicaràn los planos , y solidos , que componen aquella potestad con la facilidad , que se ve en el exemplo siguiente.

Quiero saber de què solidos,ò productos se compone la sexta potestad , que llaman *Cubo-cubo*. Busco su caracter a6.en la linea infima de la tabla 2.y sobre dicho caracter hallo la columna 6.15.&c.que traslado en vn papel , como aqui se ve ; añadiendo vna vnidad à cada cabo , y escri-

1	a6.	
6	a5	b1.
15	a4	b2.
20	a3	b3.
15	a2	b4.
6	a1	b5.
1		b6.

vien-

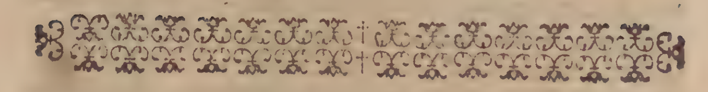
viendo à la derecha vna a, y vna b, en la forma que arriba dixe; y juntamente la progresſion de los exponentes, aſcendente en a, y deſcendente en b. Hecho eſto, ſobre eſta nueva tabla irè, como leyendo los ſolidos, ò productos de que ſe compone la poteſtad ſobredicha; advirtiendo, que la a, ſignifica ſiempre el ſegmento primero del lado, ò raiz; y la b, el ſegundo ſegmento.

Digo, pues, que la ſexta poteſtad ſe compone de vn cubo-cubo del ſegmento primero; mas, del ſextuplo ſuperſolido del ſegmento primero multiplicado por el ſegmento ſegundo: mas, de 15. quadrado-quadrados del ſegmento primero, multiplicados por el quadrado del ſegmento ſegundo: mas, de 20. cubos del ſegmento primero, multiplicados por el cubo del ſegmento ſegundo: mas, de 15. quadrados del ſegmento primero, multiplicados por el quadrado-quadrado del ſegmento ſegundo: mas, del ſextuplo del ſegmento primero, multiplicado por el ſuperſolido del ſegmento ſegundo: y mas, de vn cubo-cubo del ſegmento ſegundo; y aſsi de las demàs poteſtades.

El modo de hazer, y continuar la tabla ſobredicha infinitamente verèmos en el ſiguiente libro; y el fundamento de ſu fabrica, ſe verà claramente en el tratado de la Algebra, donde ſe hara otra vez mas patente todo lo que haſta aora hemos dicho.

***





LIBRO II.

DE LA ANALYSI, O RESOlucion de las poteſtades numericas.

LA reſolucion de las poteſtades numericas conſiſte en hallar la raìz de quien proceden: el artificio para hallarla eſtriva en los ſiguientes preceptos, cuya generalidad comprehende la reſolucion de todas las poteſtades numericas ſimples, que ſe pueden ofrecer, que ſon infinitas; y aunque parezcan muchos, pero ſu practica ſerà facil con los exemplos que pondrè deſpues. Eſte methodo es del P. Zaragoza en el lib. 2. de ſu Arithmetica Univerſal, y lleva conſigo vna gran conveniencia; y es, que quien ſupiere ſacar por ella la raìz quadrada, ſabrà juntamente ſacar las de las demàs poteſtades.

CAPITULO I.

DE LAS REGLAS GENERALES PARA LA ANALYSI de las poteſtades numericas.

PROP. X. Problema.

Reglas generales para la extraccion de las raìzes de las poteſtades numericas.

REgla 1. El nùmero de quien ſe quiſiere ſacar la raìz, ſe diſtinguirà con puntos de tantas en tantas cifras, como

como ay vnidades en el exponente de la poteſtad, cuya raiz ſe buſca, empezando à hazer eſta diviſion por la derecha, y proſiguiendo àzia la izquierda; como ſi del numero pueſto en A ſe huviere de ſacar la raiz quadrada, ſe pondràn las diviſiones de dos en dos cifras, como ſe vè, por ſer 2. el exponente del quadrado; y ſi ſe huviere de ſacar la raiz cubica, ſe haria la diviſion de tres en tres cifras, como en B, por ſer 3. el exponente del cubo: y tantas cifras tendrà la raiz, quantos fueren los miembros, en que ſe dividiò dicho numero.

A. 5. 6 3.4 9.0 1.
B. 5. 6 3 4 9 0 1.

Regla 2. Hecho lo ſobredicho, ſe empezarà la operacion en la forma ſiguiente: Buſqueſe la raiz del primer miembro à la izquierda; la qual [19. lib. 1.] jamas tendrà mas que vna cifra, y eſta ſe hallarà de memoria, ò por la tabla 1. que và dividida en diferentes ordenes, vno para cada poteſtad; buſqueſe, pues, en el orden perteneciente à la poteſtad, cuya raiz ſe buſca, el numero del miembro primero; y ſi eſte no ſe hallare en la tabla, ſe eſcogerà el proximo menor, y à ſu lado ſe encontrarà la raiz: como ſi ſe quiere la raiz quadrada de 49. buſqueſe en el orden de a2. el 49. y à ſu lado ſe encontrarà 7. que es ſu raiz; pero ſi buſcaſſe la raiz quadrada de 56. por no hallarſe 56. en la tabla, eſcogeria ſu proximo menor, que es 49. y à ſu lado la raiz 7. la qual tomaria como ſi fueſſe raiz de 56.

Regla 3. Eſta primera cifra de la raiz, ſe eſcrivirà ſobre vna raya, que ſe puede poner ſobre el miſmo numero de quien ſe ſaca la raiz; y la poteſtad de dicha cifra, ſe eſcrivirà debaxo las del primer miembro; eſto es, ſi ſe ſaca la raiz quadrada, ſe multiplicarà el numero hallado por sì miſmo, y el producto ſe eſcrivirà en el lugar ſobredicho; ſi ſe ſaca la raiz cubica, ſe cubicarà, y ſu cubo ſe pondrà en el lugar referido, &c. cuidando ſiempre que la vltima cifra à la derecha correſponda à la vltima del miembro ſobredicho: reſteſe eſta poteſtad del numero de dicho miembro, y ſe tendrà el reſiduo primero; y en ſu ſeguida ſe eſcrivirà el miembro ſegundo, omitiendo el punto que le diſtinguia del primero.

Re-

Regla 4. Passamos yà à inquirir la segunda cifra de la raiz; y lo primero se ha de disponer vna tabla con cinco columnas, que se podrà trasladar de las que pongo mas abaxo con el titulo de *Tabla* 3. *Analytica*: si se saca raiz quadrada, se tomarà la tabla propria para ella: si se saca raiz cubica, se tomarà la propria para esta raiz; y assi de las demàs; y en cada vna se pondràn los numeros, y caracteres que alli tiene. La fabrica de estas tablas se enseñarà en la Proposicion siguiente.

Regla 5. Preparada la tabla propria para la raiz que se busca, se tendrà con ella vna pauta para proseguir, y acabar la operacion, como se sigue: La cifra que se hallò por raiz del miembro primero, y que se puso sobre la raya, se escrivirà tambien en la tabla al lado del caracter A1. en la segunda columna; à esta cifra, en dicho lugar se añadirà siempre por regla general vn zero; y suponiendo que esta cifra zero, es valor del caracter A1. si en la tabla se hallare tambien el caracter A2. se quadrarà, y su quadrado serà el valor de A2. y se escrivirà à su lado; y si huviere A3. se cubicarà, y su cubo serà el valor de A3. y se escrivirà à su lado; y assi los demàs.

Regla 6. Multipliquese cada numero de la segunda columna por el que le corresponde à su lado en la primera, y los productos se escrivirán con el mismo orden en la tercera: sumense los numeros de la tercera columna, y esta suma serà el partidor, porquien se ha de partir à parte el residuo primero, y la cifra que viniere por quociente (que jamàs ha de ser mas que vna) serà la segunda de la raiz; y assi se pondrà sobre la raya al lado de la primera que antes se hallò; y tambien se escrivirà al lado de B1. Aqui se ha de advertir, que no se haga caso de lo que sobrare hecha la particion.

Regla 7. A esta segunda cifra hallada, que se escriviò al lado de B1. jamàs se le añade zero; si que si ay B2. se quadra, y su quadrado se escrive al lado de B2. y si ay B3. se cubica, y su cubo se escrive en B3. &c. y assimismo se proseguirà si ay mas potestades de B: Multipliquese despues cada numero de esta quarta columna por su correspondiente

diente en la tercera ; y escrivanse los productos con el mismo orden en la quinta ; y el vltimo numero de la quarta, à quien jamàs corresponde otro en la tercera por quien multiplicarse, se trasladarà à la quinta columna, cuya suma se restarà del residuo primero, y saldrà el residuo segundo.

Regla 8. Si todo el residuo segundo fuere zeros, y no huviere otro miembro en la potestad que correr, se avrà acabado la operacion, y la raiz hallada serà justa, y precisa; y si siendo el residuo segundo todos zeros, aunque quedasse alguno, ò algunos miembros que correr, siendo tambien zeros, se pondràn en el quociente tantos zeros como son los miembros que quedan, y esso serà la raiz justa; pero si el residuo segundo no fuere zeros, y no huviesse yà otro miembro en la potestad que se resuelve, serà señal que su raiz no es justa, sino sorda; y que la potestad propuesta es irracional; y assi, no ay que cansarse en buscar raiz precisa, porque es impossible; pero si importare, se podrà aproximar por las reglas, que despues darèmos.

Regla 9. Si el residuo segundo no fuere zeros, si numero, y quedare aun algun otro miembro, se proseguirà la misma operacion en la forma siguiente: Dispongase segunda vez la misma tabla, y al lado del caracter A1. se escriviràn las dos letras halladas por raiz en las operaciones passadas, y luego se les añadirà vn zero; y se sacaràn, si fuere menester, sus Potestades A2, A3, &c. como antes; y continuando las mismas operaciones antecedentes, se hallarà la tercera cifra de la raiz; y si acabada la operacion sobrare algo, este serà el residuo tercero; y si aun huviere otro miembro, se buscarà otra cifra de la raiz, formando otra vez la tabla, y haziendo las mismas operaciones hasta concluir del todo la resolucion.

Estas son las Reglas generales con que se sacarà la raiz de qualquiera potestad numerica, que aplicadas à la practica en las siguientes Proposiciones, se verà quanto facilitan esta ciencia Analytica; pero antes de todo, pongo las tres tablas siguientes, con la explicacion de su fabrica, y vso, como precisas para las sobredichas operaciones.

TA-

TABLA I.

De las potestades de los numeros digitos.

	A2.		A3.		A4.
1	1	1	1	1	1
4	2	8	2	16	2
9	3	27	3	81	3
16	4	64	4	256	4
25	5	125	5	625	5
36	6	216	6	1296	6
49	7	343	7	2401	7
64	8	512	8	4096	8
81	9	729	9	6561	9

	A5.		A6.		A7.
1	1	1	1	1	1
32	2	64	2	128	2
243	3	729	3	2187	3
1024	4	4096	4	16384	4
3125	5	15625	5	78125	5
7776	6	46656	6	279936	6
16807	7	117649	7	823543	7
32768	8	262144	8	2097152	8
59049	9	531441	9	4782969	9

TABLA II.

Synthetico-Analytica.

										12
									11	66
								10	55	220
							9	45	165	495
						8	36	120	330	792
					7	28	84	210	462	924
				6	21	56	126	252	462	792
			5	15	35	70	126	210	330	495
		4	10	20	35	56	84	120	155	220
	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a2.	a3.	a4.	a5.	a6.	a7	a8	a9.	a10	a11	a12

TA-

TABLA III.
Analytica.

Tabla para a2.

2	a1.	b1.

Tabla para a3.

3	a2.	b1.
3	a1.	b2.
		b3.

Tabla para a4.

4	a3.	b1.
6	a2.	b2.
4	a1.	b3.
		b4.

Tabla para a5.

5	a4.	b1.
10	a3.	b2.
10	a2.	b3.
5	a1.	b4.
		b5.

Tabla para a6.

6	a5.	b1.
15	a4.	b2.
20	a3.	b3.
15	a2.	b4.
6	a .	b5.
		b6.

Tabla para a7.

7	a6.	b1.
21	a5.	b2.
35	a4.	b3.
35	a3.	b4.
21	a2.	b5.
7	a1.	b6.
		b7.

PROP. II. Problema.
Explicaſe la fabrica, y vſo de las Tablas.

Conſtruccion, y vſo de la Tabla 1.

LA Tabla 1. ſe fabrica, multiplicando cada numero digito por ſi miſmo continuamente, haſta hallar las poteſtades pueſtas à ſu lado. El vſo es tambien facil, porque hallando el numero, cuya raiz ſe buſca en la primera columna, le correſponde à ſu lado ſu propria raiz, ò quadrada en la ſerie que tiene arriba el caracter a2. ò cu-

bica, en la que tiene à 3. &c. y si el numero no se hallare, se toma su proximo menor, y à su lado la raiz que le corresponde; y al contrario, si se busca la raiz en la segunda, se hallarà su potestad en la primera.

Construccion, y vso de la Tabla 2.

COmponese la Tabla 2. de esta suerte: Dispongase transversalmente la progressiou natural Arithmetica, empezando del 2. y desde alli mismo se escrivirà otra diagonalmente, como se ve en la Tabla: Hecho esto, se hallaràn los otros numeros, sumando el de abaxo con su inmediato de arriba, y la suma serà su numero colateral, como en el segundo lugar sobre a 3. hallo 3. y sobre este otro 3. sumados hazen 6. escrivo, pues, 6. à su lado sobre el 4. y queda formada la tercera columna, que es la primera que ay que formar. Para formar la quarta, prosigo, diziendo, 4. y 6. de la tercera columna son 10. que escrivo al lado del 6. y continuando, digo, 6. y 4. de la tercera columna son tambien 10. que escrivo al lado del 4. y queda formada la quarta columna; y con el mismo artificio se formaràn las demas; y se podrà continuar la Tabla quanto se quisiere, a quien llamo *Synthetico-analytica*, porque contiene los planos, y solidos que componen las potestades; y que sirven tambien para su resolucion, trasladandoles en las tablas particulares para cada potestad, como luego dirè.

Construccion, y vso de la Tabla 3.

LA Tabla 3. se compone de muchas Tablas particulares, vna para cada potesta: consta cada vna de cinco columnas: en la primera, à la izquierda se ponen los numeros proprios de aquella potestad, sacados de la Tabla segunda: en la segunda columna se ponen los caracteres de les potestades de *a*, que significa el primer segmento, ò cifra de la raiz, como dixe; y dicho segmento, quando se vsa de estas Tablas, ya se supone conocido. Colocanse dichos caracteres al lado de los numeros de la primera columna, poniendo arriba el de la potestad mas alta, cuyo exponente siempre tiene vna vnidad menos, que el ex-

exponente de la poteſtad, à quien pertenece la tabla. La tercera columna ſe dexa vazia. En la quarta ſe coloca el caracter b, y ſus poteſtades haſta la que tiene el miſmo exponente de aquella a quien pertenece la tabla. La vltima columna ſe dexa tambien vazia. Con eſto vienen à tener en eſtas tablas los planos, y ſolidos el miſmo orden que expliquè en el libro antecedente Prop. 27. Lo demàs que pertenece al vſo de eſtas tablas conſta de lo dicho en la Prop. paſſada, y mucho mas de lo que ſe dirà en las ſiguientes.

PROP. XXII. Problema.

Sacar la raiz quadrada.

ADvierto, que todas las operaciones ſiguientes neceſſitan de gran curioſidad, y limpieza en eſcrivir los numeros, cuidando ſumamente de la correſpondencia de vnos guariſmos con otros, porque de otra manera ſerà muy contingente el error.

Exemplo 1. Pideſe la raiz quadrada del numero 1764.

Operacion. Por quanto el exponente del quadrado es 2. divido el numero propueſto con puntos de dos en dos guariſmos, y empiezo la operacion por la mano izquierda, ſacando la raiz quadrada del primer miembro, que es 17. y aſsi digo, la raiz quadrada de 17. (aunque no precisa) es 4. que eſcrivo ſobre la raya: el quadrado de 4. es 16. porque 4. vezes quatro ſon 16. eſcrivo el 16. debaxo del 17. y reſtando, queda 1. para el reſiduo primero; y baxando de arriba el 64. que es el miembro ſegundo, le eſcrivo al lado de 1. y es todo el reſiduo primero 164. omitiendo el punto dividente por no ſer yà meneſter.

V.	4. 2.
Quadrado.	1 7. 6 4.
	1 6
Reſiduo 1.	1 6 4.
	1 6 4.
Reſiduo 2.	0 0 0.

Paſſo à la ſegunda operacion para hallar la ſegunda letra de la raiz; y lo primero diſpongo la tabla propria del quadrado, como ſe ſigue.

Escrivo en la segunda columna al lado de a1. el 4. que halle por primera letra de la raiz, y añadiendole vn zero es 40. multiplico 40. por el 2. de la primera columna, y sale el producto 80. que escrivo en la tercera, y es el partidor: parto, pues, el residuo primero 164. por 80. y les cabe 2. y sin passar mas adelante la particion escrivo el 2. sobre la raya; y en la quarta columna al lado de b1. y esta es la segunda cifra de la raiz; y porque b2. es el quadrado de b, quadro el 2. multiplicandole por si mismo, y el producto 4. es el valor de b2. que escrivo à su lado: multiplico la quarta columna por la tercera: esto es, 80. por 2. y es el producto 160. que pongo en la quinta columna; y porque al 4. no le corresponde multiplicador en la tercera columna, le escrivo debaxo del 160. y la suma de entrambos es el restador: escrivo, pues, 164. debaxo del residuo primero; y hecha la resta, hallo ser el residuo segundo todo zeros; y no aviendo otro miembro que correr, queda concluida la operacion; y digo ser 42. la raiz justa del quadrado propuesto.

2	a1. 40.	80	b1. 2	160
			b2. 4	4
				164

Exemplo 2. Pidese la raiz quadrada de 5225.

Operacion 1. Divido, como antes, el numero propuesto de dos en dos guarismos, y empiezo la operacion, diziendo: La raiz de 5. miembro primero à la izquierda, es proximamente 2. que escrivo sobre la raya: y su quadrado 4. pongo debaxo del 5. Y restando 4. de 5. resta 1. Y baxando à su lado el miembro segundo 52. es 152. el residuo primero.

V.	2. 3. 5.
Quadrado.	5.5 2.2 5.
	4
Residuo 1.	1 5 2
	1 2 9
Residuo 2.	2 3 2 5.
	2 3 2 5.
Residuo 3.	0 0 0 0.

Operacion 2. De este residuo 1. he de sacar la segunda letra de la raiz; y lo primero dispongo la tabla siguiente.

Escrivo en la segunda columna al lado de *a* el 2. hallado por

por raiz : y añadiendole vn zero es 20. Multiplico 20. por el 2. de la primera columna, y salen 40. que escrivo en la tercera, y es el partidor. Parto, pues, el residuo primero por 40. y les cabe 3. Escrivo el 3. sobre la raya; y en la quarta columna al lado de *b*1. y esta es la segunda letra de la raiz: escrivo al lado de *b*2. su valor, que es 9. quadrado de 3. Multiplico finalmente la tercera columna por la quarta: esto es, 40. por 3. y es el producto 120. que pongo en la quinta columna: y porque al 9. no le corresponde multiplicador en la tercera, le escrivo debaxo del 120. y la suma de entrambos 129. es el restador. Resto, pues, 129. del residuo primero, y quedan 23. para el residuo segundo, à cuyo lado escrivo el 25. que es el miembro tercero del numero propuesto: y es 2325. el residuo segundo.

2	a1. 20	40	b1. 3	120
			b2. 9	9
				129

Operacion 3. De este residuo 2. he de sacar la tercera letra de la raiz, para lo qual dispongo otra vez la tabla como se sigue.

Pongo el 23. que tengo yà por raiz, al lado de *a*1. en la tabla: y añadiendo vn zero es 230. Multiplico 230. por el 2. de la primera columna, y el producto es 460. que pongo en la tercera, y es partidor. Parto 2325. residuo segundo, por 460. y les cabe 5. Escrivo 5. sobre la raya, y es la tercera letra de la raiz. Escrivo tambien el mismo 5. al lado de *b*1. y su quadrado 25. al lado de b2. Multiplico 460. por 5. y escrivo el producto 2300. en la vltima columna: y porque el 25. carece de multiplicador, le traslado à la quinta columna en su lugar. La suma de esta vltima columna es 2325. que restada del residuo 2. queda el residuo tercero zeros. Digo, pues, que la raiz que se busca es 235.

2	a1. 230	460	b1. 5	2300
			b2. 25	25
				2325

Demonstr. Por constar el quadrado dado de 5. cifras, tiene

tiene (19.) tres cifras en ſu raiz, tantas quantos ſon los miembros en que ſe dividiò: de eſtas tres cifras, la primera à la izquierda es centenares; la ſegunda, dezenas; y la tercera, vnidades, ſegun lo que ſe dixo en la Arithmetica Inferior. Con que la raiz 235. conſta de tres ſegmentos: el primero es 200. el ſegundo 30. y el tercero 5. Y porque la Arte Analytica và reſolviendo el todo en ſus partes, para llegar a ſu perfecto conocimiento, por eſta cauſa empieza eſta reſolucion del quadrado, conſiderando al principio ſolamente los dos ſegmentos primeros de la raiz, que ſon 200. y 30. y en la fig. 3. vienen a ſer los ſegmentos EH, HI, que juntos forman la linea EI 230. que es lado del quadrado EL 52900. parte del total EF, que ſupongo ſer el que ſe propuſo. Eſto ſupueſto.

Porque eſte quadrado EL 52900. ſe compone [4. 2. Eucl.] del quadrado EK, del quadrado OQ, y de los dos rectangulos HQ, PO, ſi ſe hallan los lados de eſtos planos, que ſolo ſon los dos EH, HI, ſe ſabràn las dos primeras letras de la raiz, que ſon 2. y 3. eſto es, 200. y 30. Eſtos, pues, ſe hallan por las reglas ſobredichas; porque primeramente ſe halla de memoria la raiz, ò lado del miembro primero 5. eſto es, 50000. [que eſto vale por el lugar que ocupa] y dicha raiz hallada es 2. eſto es, 200. por la miſma razon, y es el lado EH: multiplicandole deſpues por sì miſma, ſe ſabe ſer el quadrado EK 40000. que reſtado del quadrado EL, queda el gnomon PLH, que es el reſiduo primero.

En eſte reſiduo ſe incluyen (4. 2. Eucl.) los dos rectangulos iguales PO, HQ, y el quadrado KL: los lados mayores de los rectangulos ſon PK, HK, iguales a EH yà conocido; y por conſiguiente ſon cada vno 4. pero el lado menor HI, que tambien lo es del quadrado KL, es el que ſe buſca. Hagaſe el rectangulo ST igual à HQ, y ſerà el rectangulo SL igual al gnomon ſobredicho, o reſiduo primero: Luego partiendo eſte rectangulo, ò reſiduo SL por SK, duplo de la raiz hallada, de tal ſuerte, que en la particion ſobre lo baſtante para formar el quadrado KL, el quociente ſerà el lado KO, ò HI, ſegunda letra de la raiz.

Eſto

Esto es, pues, lo que se ha hecho, porque primeramente el lado hallado, y puesto en la tabla al lado de *a*1. se duplicò multiplicandole por el 2. de la primera columna; y partiendo el residuo primero por dicho duplo, que es la linea SK, se hallò ser el quociente 3. tal, que puesto en la quarta columna en *b*, y multiplicando al lado SK 8. ù 80. ù 800. (que para el caso es lo mismo) y multiplicandose à si mismo en *b*2. formò la cantidad 129. que es el rectangulo SL, ò el gnomon PLH: luego se hallò legitimamente el segmento HI 3. ù 30. segunda letra de la raiz.

Aviendo, pues, yà restado al principio, del quadrado total dado EF, el quadrado EK, y aora restando del residuo el gnomon PLH, se ha restado del quadrado EF el quadrado EL, y por consiguiente, queda el residuo segundo, que es el gnomon TFI, ò el rectangulo DF, compuesto del rectangulo CL igual a los dos VL, LY, y al quadrado LF del segmento IY: luego sabidos por las operaciones antecedentes los dos segmentos EH, HI, se sabrà todo EI, o TL: y por esta causa, en las Tablas, que segundariamente se formaron, se pusieron al lado de *a*1. las dos cifras halladas de la raiz; y multiplicandose por el 2. de la primera columna, se tuvo sabido todo el lado DL: luego haziendo la misma operacion que antes, se hallarà el lado IY 5. y quedarà sabida toda la EY 235. lado, ò raiz, que se deseaba saber.

Aqui se vè claramente, que con el artificio sobredicho se resuelve la potestad en los planos, ò solidos que la componen, por quienes se sacan con las Reglas dadas los segmentos, que forman el lado total; y como estas mismas sirvan para las demas potestades por su generalidad, no serà menester repetir sus demonstraciones.

ADVERTENCIAS.

1. *Quando sucediere, que el residuo que se ha de partir, fuere menor que el partidor hallado en las tablas, se pondrà vn zero sobre la raya, al lado de las cifras halladas de la raiz, y se proseguirà haziendo otras tablas, si faltaren aun alguno, ò algunos miembros que resolver; y todas las cifras*

halladas de la raiz, ſe pondràn al lado de a1. en dichas tablas, y ſe obrarà como en las demàs; y lo miſmo ſe ha de obſervar en la reſolucion de las otras poteſtades.

2. *Si acabada alguna operacion, ſe hallare el reſiduo todo zeros, y faltaren aun algunos miembros que reſolver, no es meneſter mas que añadir ſobre la raya à las cifras halladas de la raiz tantos zeros, como faltan puntos que reſolver: ambas advertencias ſe vèn practicadas en el exemplo ſiguiente.*

Exemplo 3. Sea el quadrado, cuya raiz ſe buſca 412090000. Dividole con puntos de dos en dos guariſmos, como ſe vè; y empiezo la operacion, diziendo: La raiz quadrada de 4. es 2. que eſcrivo ſobre la raya; y ſu quadrado 4. debaxo; y hecha la reſta hallo ſer el reſiduo zero, y baxando el 12. es el reſiduo primero 12. Para la ſegunda

V.	2 0 3 0 0.
Quadrado.	4. 12 09. 00. 00.
	4.
Reſiduo 1.	12. 09.
	12 09.
Reſiduo 2.	0 0 0 0.

operacion, en que he de buſcar la ſegunda cifra de la raiz, diſpongo la tabla ſiguiente, y hallo que el diviſor, que dà la tercera columna es 40. y ſiendo el reſiduo primero 12. menor que 40. no ſe puede partir; y aſsi pongo vn zero ſobre la raya al lado del 2. y no ay para què proſeguir la tabla ſobredicha.

2	a1. 20	40

Paſſo, pues, a la tercera operacion, y baxando de arriba el 09. que es el miembro tercero, es ya el reſiduo primero 1209. y para hallar la tercera cifra de la raiz, hago la tabla ſiguiente, y poniendo en a1. los 20. que ſe hallaron de raiz, les añado vn zero, y ſon 200. multiplicoles por el 2. de la primera columna, y ſalen en la tercera 400. que es el partidor: parto, pues, el reſiduo primero 1209. por 400. y vienen al quociente 3. eſcrivo 3. al lado de las otras cifras, halladas de la raiz ſobre la raya, y tambien en

2	a1. 200	400	b1. 3	1200.
			b2. 9	9.
				1209.

en b1. y ſiendo b1. 3. ſerà b2. 9. multiplico, ſiguiendo la regla 400. por 3. y eſcrivo el producto 1200. en la vltima columna, y debaxo en ſu lugar eſcrivo el 9. de b2. y es la ſuma 1209. reſtado eſte numero, ſegun la regla del reſiduo primero; queda el reſiduo ſegundo todo zeros; y por ſobrar aun dos puntos, ò miembros mas que reſolver, y ſer tambien zeros, pongo dos zeros en la raiz hallada, es à ſaber tantos como faltaban puntos; y es toda la raiz juſta 20300.

ADVERTENCIA.

Quando la ſuma de los productos de la vltima columna fuere tan crecida, que no ſe pudiere reſtar del reſiduo, ſerà ſeñal de averſe tomado ſobrado en la particion antecedente para el quociente; y aſsi ſerà meneſter repetir la operacion, dando à b1. *otra cifra de menor valor, para que ſe pueda hazer la reſta.*

En los exemplos propueſtos he comprehendido todas las dificultades, que en eſta materia pueden ocurrir, por lo que eſcuſo añadir mas exemplos, ſingularmente ſiendo eſtas miſmas reglas las que reſuelven las demàs poteſtades, con cuya reſolucion ſe habilitarà mas el Analyſta.

PROP. IV. Problema.

Sacar la raiz cubica.

Exemplo 1. Pideſe la raiz cubica de 148877.

Operacion. Por ſer 3. el exponente del cubo, ſe divide el numero dado con puntos de tres en tres guariſmos, empeçando por la mano derecha. Hecho eſto, ſe empieza la reſolucion de eſta manera: La raiz cubica proxima del primer miembro 148. es 5. y ſu cubo es 125. eſcrivo 5. ſobre la raya, y el 125. debaxo del 148. y hecha la reſta, es el reſiduo 23. à cuyo lado eſcrivo el miembro ſegundo, que es 877. y es todo el reſiduo primero 23877. y para la ſegunda operacion, formo la tabla ſiguiente.

√.	5 3.
Cubo.	148. 8 7 7.
	125.
Reſiduo. 1.	23 8 7 7.
	23 8 7 7.
Reſiduo 2.	00 0 0 0.

Pueſ-

Puesto el 5. que saliò por raiz al lado de a1. le añado vn zero, y es 50. luego el valor

3	a2.	2500	7500	b1.3	22500.
3	a1.	50	150	b2.9	1350.
				b3.27	27.
			7650.		23877.

de a2. es 2500. multiplico la segunda columna por la primera, cada termino por su correspondiente, y los productos 7500. y 150. les escrivo en la tercera columna; la suma de estos 7650. es el partidor; parto, pues, el residuo primero por 7650. y hallo 3. por segunda letra de la raiz; escrivola sobre la raya al lado del 5. que se hallò antes; y en la tabla, al lado de b1. con que el valor de b1. es 3. luego el de b2. serà 9. y el de b3. 27. multiplico la tercera columna por la quarta; esto es, 7500. por 3. y escrivo el producto 22500. en la vltima: multiplico tambien 150. por 9. y escrivo el producto 1350. en la vltima columna; y porque el 27. no tiene por quien multiplicarle, le pongo debaxo los sobredichos productos; cuya suma es 23877. que restada del residuo primero, dà el residuo segundo todo zeros, con que es 53. la raiz cubica que se pide.

Exemplo 2. Se ha de sacar la raiz cubica de 75686967. Aviendo, pues, dividido el numero dado de tres en tres cifras, hallo que la raiz cubica proxima del primer miembro 75. es 4. cuyo cubo es 64. escrivo el 4. sobre la raya, y el 64. debaxo del 75. y hecha la resta, queda el residuo 11. á

√.	4 2 3.
Cubo.	75.686.967.
	64
Residuo 1.	11686.
	10088.
Residuo 2.	1598967.
	1598967.
Residuo 3.	0000000.

cuyo lado escrivo el segundo miembro 686. y es el residuo segundo 11686. y para la segunda operacion, formo la tabla siguiente.

Puesto el 4. que saliò por raiz al lado de a1. y añadien-

3	a2.	1600	4800	b1. 2	9600.
3	a1.	40	120	b2. 4	480.
				b3. 8	8.
			4920		10088.

dole

dole vn zero, es 40. el valor de a1. luego el valor de a2. es 1600. multiplico aora la ſegunda columna por la primera, y eſcrivo los productos en la tercera, cuya ſuma 4920. es el partidor; parto, pues, el reſiduo primero 11686. por 4920. y hallo 2. por ſegunda letra de la raiz: eſcrivo dicho 2. ſobre la raya al lado del 4. que antes ſe hallò por raiz; y tambien en la tabla al lado de b1. con que el valor de b1. es 2. y por conſiguiente el de b2. es 4. y el de b3. es 8. multiplico la tercera columna por la quarta, y eſcrivo los productos en la vltima; y por no tener el 8. por quien multiplicarſe, le eſcrivo debaxo los dichos productos en la vltima columna, cuya ſuma es 10088. que reſtada del reſiduo primero, dà por reſiduo 1598. y baxando à ſu lado el miembro vltimo, es el reſiduo ſegundo 1598967. Para paſſar la tercera operacion, y hallar el tercer guariſmo de la raiz, diſpongo otra vez la tabla, como ſe ſigue.

3	a2. 176400	529200	b1. 3	1587600.
3	a1. 420	1260	b2. 9	11340.
			b3. 27	27.
		530460		1598967.

Eſcrivo el 42. que ſe ha hallado por raiz al lado de a1. y añadido el zero ſerà 420. valor de a1. luego el valor de a2. ſerà 176400. y multiplicando cada vno de eſtos numeros por el 3. que le correſponde en la primera columna, ſe eſcriven ſus productos en la tercera, cuya ſuma 530460. es el partidor, por quien partido el reſiduo ſegundo, dà el quociente 3. que es la tercera cifra de la raiz, que ſe eſcrive ſobre la raya al lado de 42. y en la tabla al lado de b1. con que b2. ſerà 9. y b3. ſerà 27. Hecha la multiplicacion de la tercera columna por la quarta, y pueſtos en la quinta los productos, ſe hallarà ſer la ſuma de eſtos, 1598967. que reſtada del reſiduo ſegundo, dà el reſiduo tercero todo zeros, con que la raiz juſta es 423.

PROI.

PROP. V. Theorema.

Las poteſtades, cuyos exponentes proceden de la multiplicacion de vno, ò mas exponentes inferiores, ſe pueden reſolver ſacando la raiz propria, ſegun qualquiera de dichos exponentes; y de eſta ſacando otra raiz propria ſegun el otro.

E*Xplicacion.* El exponente del quadrado-quadrado es 4. que procede de la multiplicacion de 2. exponente del quadrado, por sì miſmo: Digo, pues, que la raiz quadrado-quadrada ſe puede hallar ſacando primero la raiz quadrada del numero dado; y de eſta raiz ſacando otra vez la raiz quadrada; y eſta vltima ſera la raiz quadrado-quadrada del numero dado. Aſsimiſmo, el exponente del cubo-cubo, ò ſexta poteſtad es 6. que procede de la multiplicacion de 3. exponente del cubo, por 2. exponente del quadrado: Digo, pues, que la raiz cubo-cubica de vn numero dado, ſe puede ſacar, hallando la raiz quadrada de dicho numero, y deſpues la raiz cubica del numero que ſaliò por raiz quadrada, ò al contrario, ſacando primero la cubica del numero dado; y de eſta deſpues, la quadrada, y aſsi de las demàs poteſtades: La razon ſe vè claramente en la ſiguiente progreſsion.

2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
a1.	a2.	a3.	a4.	a5.	a6.	a7.	a8.	a9.

Porque ſi de a4. que es 16. ſe ſaca ſu raiz quadrada, ſe halla ſer 4. y ſacando la raiz quadrada de 4. ſe halla el 2. que es raiz quadrado-quadrada de 16. Aſsimiſmo, por quanto el exponente de a6. procede de la multiplicacion de 3. por 2. ſi de a6. que es en el exemplo propueſto 64. ſe ſaca ſu raiz cubica, ſe hallara 4. cuya raiz quadrada 2. es raiz cubo-cubica de 64. ò tambien ſi del miſmo 64. ſe ſaca la raiz quadrada, ſe hallarà ſer 8. y ſacando la raiz cubica de 8. ſe halla otra vez 2. raiz cubo-cubica de 64. y aſsi en las demàs: La razon ſe vè claramente en la ſerie propueſta, por-

porque el 64. no solo proviene de la multiplicacion de 32. por la raiz 2. si tambien de la multiplicacion del cubo 8. por si mismo; con que 64. es quadrado del cubo de su raiz: luego si se saca la raiz quadrada de 64. se halla el cubo; y sacando la raiz cubica de este cubo, se sabrà la raiz cubo-cubica de 64. y assi en las demàs.

PROP. VI. Problema.

Sacar la raiz quadrado-quadrada.

SEa el quadrado-quadrado 1048576. pidese su raiz. Como el exponente de esta potestad sea 4. que procede de la multiplicacion de 2. por 2. se puede sacar su raiz de dos maneras: 1. Sacando su raiz quadrada, y de la que saliere, sacando otra vez su raiz quadrada: Saquese, pues, (4.) la raiz quadrada del numero dado, y se hallarà ser 1024. cuya raiz quadrada 32. es la quadrado-quadrada que se desea.

2. Se puede sacar dicha raiz por la regla general, como se sigue.

por ser 4. el exponente de la potestad dada, divido el numero dado de quatro en quatro guarismos, y hallo por la tabla primera, que la raiz quadrado-quadrada de 104. miembro primero, es 3.

	√. 3 2
Quadr.-quad.	104.8576.
	81
Residuo 1.	23 8576.
	23 8576.
Residuo 2.	00 0000.

cuyo quadrado-quadrado es 81. escrivo, pues, el 3. sobre la raya, y el 81. debaxo del 104. y restando 81. de 104. es la resta 23. a cuyo lado escrivo el miembro segundo, y es el residuo primero 238576. como se ve; y dispongo la tabla siguiente para hallar la segunda cifra de la raiz.

4	a3.	27000	108000	b1.	2	216000.
6	a2.	900	5400	b2.	4	21600.
4	a1.	30	120.	b3.	8	960.
				b4.	16	16.
			113520			238576.

Pues-

Puesto el 3. que se hallò por raiz en a1. en la segunda columna, y añadiendole vn zero es 30. el valor de a1. y por consiguiente su quadrado 900. es el valor de a2. y su cubo 27000. el valor de a3. multiplicando la segunda columna por la primera, salen los productos en la tercera, cuya suma 113520. es el partidor: parto, pues, el residuo primero por el numero sobredicho, y hallo por quociente 2. que escrivo sobre la raya, como cifra segunda de la raiz; y tambien al lado de b1. con que b1. es lo mismo que 2. luego b2. es 4. y b3. es 8. y b4. es 16. multiplico la tercera columna por la quarta, y salen en la quinta los productos, cuya suma restada del residuo primero, dà el residuo segundo todo zeros; y concluyo, diziendo, ser 32. la raiz justa del quadrado-quadrado propuesto.

PROP. VII. Problema.

Hallar la raiz del surfolido, ò relato primero.

LA quinta potestad, surfolido, ò relato primero, que se propone para resolver hallando su raiz, es 79.62624.

Operacion. Por ser 5. el exponente de esta potestad, divido de cinco en cinco cifras el numero dado; y por la tabla primera hallo ser 2. la $\surd$ 5. del primer miembro 79. el surfolido justo del 2. es 32. escrivo el 2. sobre la raya, y el 32. debaxo el 79. y restando, hallo ser la resta 47. à cuyo lado escrivo el miembro segundo, y es el residuo primero, como se ve; y para hallar la segunda cifra de la raiz, dispongo la tabla siguiente.

$\surd$.		2 4.
X5.		79. 62 624.
		32
Residuo 1.		47 62 624.
		47 62 624.
Residuo 2.		0000000.

5	a4.	160000	800000	b1.	4	3200000.
10	a3.	8000	80000	b2.	16	1280000.
10	a2.	400	4000	b3.	64	256000.
5	a1.	20	100	b4.	256	25600.
				b5.	1024	1024.
			884100			4762624.

En

En eſta tabla el valor de a1. es 20. y conſiguientemente es el valor de a2. 400. y las demàs poteſtades de a, como ſe ven: multiplicada la ſegunda columna por la primera, ſale la tercera, cuya ſuma es el partidor: partido, pues, el reſiduo primero por eſte partidor, vienen al quociente 4. eſcrivo 4. ſobre la raya, y al lado de b1. y ſaco ſus poteſtades b2. 16. b3. 64. &c. multiplico la tercera columna por la quarta, y los productos llenan la quinta, cuya ſuma reſtada del reſiduo primero, da el reſiduo ſegundo todo zeros; y es la raiz juſta 24.

PROP. VIII. Problema.

Hallar la raiz cubo-cubica.

LA ſexta poteſtad, llamada *cubo-cubo*, ſe puede reſolver de dos modos: el primero, ſegun lo dicho en la Propoſicion 5. y el ſegundo por la regla general de todas las poteſtades. Pideſe, pues, la raiz cubo-cubica del cubo-cubo numerico 1073741824.

Modo 1. Por ſer 6. el exponente de eſta poteſtad, el qual proviene de la multiplicacion de 3. por 2. ſaqueſe la raiz cubica de dicho numero, (4) y ſe hallara ſer 1024. ſaqueſe la raiz quadrada de 1024. y ſera 32. y eſta es la raiz cubo-cubica del numero propueſto. Si del miſmo numero dado ſe ſaca la raiz quadrada, ſe hallara ſer 32768. y ſi de eſte ſe ſaca la raiz cubica, ſe hallara ſer 32. como antes.

Modo 2. Dividaſe el numero dado de ſeis en ſeis cifras, por ſer 6. el exponente de eſta poteſtad: buſqueſe deſpues por la tabla primera la raiz cubo-cubica de el miembro primero, y ſe hallarà ſer 3. y ſu cubo-cubo 729. reſtado eſte del miembro primero, ſale el reſiduo 344. y eſcriviendo à ſu lado el miembro ſegundo, es el reſiduo primero, como ſe vè, 344741824. Para hallar

X6.	V. —— 3 —— 2 ——
	1073. 741824.
	729
Reſiduo 1.	344741824.
	344741824.
Reſiduo 2.	000000000.

llar aora la segunda letra de la raiz, se formarà la tabla siguiente.

6	a5. 24300000	145800000	b1. 2	291600000
15	a4. 810000	12150000	b2. 4	48600000
20	a3. 27000	540000	b3. 8	4320000
15	a2. 900	13500	b4. 16	216000
6	a1. 30	180	b5. 32	5760
			b6. 64	64
		158503680		344741824

El 3. que se hallò por primera cifra de la raiz, añadiendole vn zero es 30. valor de a1. De aqui se sacan las demàs potestades de *a*, como se vè en el exemplo; y multiplicando la segunda columna por la primera, se ponen los productos en la tercera, cuya suma es el partidor para hallar la segunda cifra de la raiz: partase, pues, el residuo primero por dicho partidor, y serà el quociente 2. que se pone sobre la raya al lado del 3. y en la tabla es el valor de b1. de quien salen las potestades b2. b3. &c. Multipliquese la quarta columna por la tercera, y los productos se escriviràn en la vltima, cuya suma restada del residuo primero, da el residuo segundo todo zeros; con que la raiz que se busca es 32.

Con este mismo artificio se resuelven todas las demàs potestades hasta el infinito, por lo qual juzgo, no ser menester proponer mas exemplos, pues bastan los que se han propuesto para la perfecta inteligencia de este assumpto.

CAPITULO II.

DE LA APROXIMACION DE LAS RAIZES sordas, ò irracionales.

RAizes irracionales, ò sordas son las raizes de las potestades irracionales, que, como dixe en la definicion

cion 10. del lib. 1. no se pueden explicar con numero alguno, ni entero, ni quebrado: Que aya semejantes potestades irracionales, que carecen de raiz justa explicable con numeros, se demonstrarà en su lugar; pero en el presente bastarà suponerlo, singularmente no siendo menester la demonstracion de su existencia para demonstrar las reglas de su aproximacion, que es el blanco de este capitulo.

Aproximar, pues, las raizes irracionales, ò sordas, consiste en hallar raiz de las potestades irracionales, la qual, aunque no serà la verdadera, y justa, porque esta no se puede hallar; pero es proxima à la verdadera; y se puede ir aproximando de tal suerte, que la diferencia de la raiz hallada, y la verdadera, sea menor que qualquiera cantidad determinada assignable, por pequeña que sea.

Esta aproximacion puede proceder hasta el infinito, sin que sea jamàs possible llegar a la raiz justa, ò verdadera. Las reglas para hazerla, son las que luego darèmos, para cuya demonstracion se necessita de los Theoremas siguientes.

PROP. IX. Theorema.

El producto de dos numeros quadrados, es numero quadrado, cuya raiz es el plano, ò producto de las dos raizes de los quadrados sobredichos.

SEan los dos numeros quadrados 4. y 9. cuyo producto es 36. Digo, que este producto 36. necessariamente ha de ser numero quadrado; y que su raiz es 6. producto de 2. raiz de 4. por 3. raiz de 9. y aunque esto se ve clarissimamente en los mismos numeros, que se han propuesto, no por esso se debe omitir la demonstracion; y para ella supongo sea $aa \backsim 4.$ $bb \backsim 9.$ y el producto de estas dos cantidades, serà $aabb \backsim 36.$ esto supuesto: segun lo advertido en el libro 1. cap. 1. el producto *aabb*, es el mismo que *abab*, por proceder tanto el vno, como el otro de la multiplicacion de vnas mismas magnitudes; siendo, pues, la raiz de *abab*, el producto *ab*, serà tambien el mismo *ab*, raiz del producto *aabb*; y siendo *a* raiz del quadrado *aa*, y *b*, raiz del quadrado *bb*, serà el producto de las raizes de

aa, *bb*, raiz del producto *aabb*, el qual neceſſariamente ha de ſer numero quadrado, por proceder de la multiplicacion de *ab* por *ab*; èſto es de vn numero conocido por sì miſmo.

PROP. X. Theorema.

El producto de dos numeros cubicos, es numero cubico, cuya raiz es el producto de las raizes de dichos numeros cubicos.

SEan los dos numeros cubicos 8. y 27. la raiz de 8. es 2. y la de 27. es 3. Digo, que el producto de 8. por 27. que es 216. es vn numero cubico, cuya raiz es 6. producto de la raiz 2. por la raiz 3. Demueſtraſe como la Propoſ. antecedente; porque ſupueſto ſea $aaa \backsim 8$. y $bbb \backsim 27$. ſerà $aaabbb \backsim 216$. y como el producto *ababab*, ſea el miſmo que *aaabbb*, por proceder de vnas miſmas magnitudes, ſerà $ababab \backsim 216$. ſiendo, pues, la raiz de *ababab*, el producto *ab*, ſerà *ab*, igual à la raiz de 216. y ſiendo *ab* el numero conocido 6. ſerà 6. la raiz cubica de 216. Luego eſte producto es vn cubo, cuya raiz es el producto de 2. raiz de 8. por 3. raiz de 27.

COROLARIO.

ESto que ſe ha demonſtrado en el quadrado, y cubo, ſe demonſtrarà con la miſma facilidad en todas las demàs poteſtades; eſto es, que el producto de dos poteſtades numericas de vn miſmo grado, es vna poteſtad numerica del miſmo grado, cuya raiz es el producto de las raizes de las ſobredichas poteſtades: como por exemplo, ſi vn quadrado-quadrado ſe multiplica por otro quadrado-quadrado, el producto ſerà vn quadrado-quadrado, cuya raiz ſerà el producto de las raizes de los primeros; y aſsi de las demàs poteſtades.

PROP. XI. Problema.

Aproximar quanto ſe quiera las raizes irracionales, ò ſordas.

R*Egla general*. Añadanſe al vltimo reſiduo tantos zeros como ay vnidades en el exponente de la poteſtad,

cuya

cuya raiz se busca; como si se busca la raiz quadrada se añadiràn dos zeros, si raiz cubica, tres; y asi de las demàs: hecho esto, se continuarà la operacion por las tablas, buscando otra cifra para la raiz, y hallada esta, se pondrà por numerador de vn quebrado, cuyo denominador serà 10. y la raiz que se hallò al principio junta con el quebrado nuevamente hallado, serà raiz mas proxima de la potestad dada. Si aun se quisiere aproximar mas, se añadiràn al vltimo residuo los mismos zeros otra vez, y se harà otra operacion por las tablas, y la cifra hallada junta con la otra, compondra con ella vn numerador de vn quebrado, cuyo denominador serà 100. y si se quisiere hallar otra para mayor aproximacion, se colocaria tambien al lado de las antecedentes por numerador, à quien se daria el denominador 1000. y asi infinitamente.

Exemplo. Pidese la raiz quadrada del quadrado irracional 69.

Operacion. La raìz de 69. aunque menor que justa, es 8. el quadrado de 8. es 64. que restado de 69. dà el residuo primero 5. quiero, pues, que la raiz se aproxime mas à la verdad; y porque el exponente del quadrado es 2. añado dos zeros al residuo 5. y es 500. y de estos he de sacar segunda cifra de raiz, para lo qual dispongo la Tabla siguiente.

	8	$\frac{306}{1000}$
	69	
	64	
Resid. 1.	500	
	489	
Resid. 2.	1100	
	110000	
	99636	
Resid. 3.	10364.	

Y obrando segun las reglas generales, pongo el 8. que se hallò por raiz en la Tabla al lado de *a*; y añadido el zero, como se acostumbra es 80. Multiplicando 80. por el 2. de la primer columna, dà el producto 160. en la tercera por partidor: parto por 160. el residuo primero 500. y es el quociente 3. esto es, tres dezimas: pongo este quebrado sobre la raya al lado del 8. que saliò antes por raiz, pero dividido de

2	a. 80	160	b1. 3	480
			b2. 9	9
				489

dicho 8. con vn punto; y efcrivo tambien dicho 3. en b1. y fu quadrado 9. en b2. y concluida la tabla, refto del refiduo primero la fuma de la vltima columna, que es 489. y fale el refiduo fegundo 11. y por raiz 8. y 3. dezimas, la qual es mas proxima que el 8. folo.

Si quiero aproximarla mas, añado dos zeros al refiduo fegundo, y ferà 1100. y pongo en *a* la raiz hallada en la tabla figuiente, fin hazer cafo del denominador 10. con que *a* ferà 83. y añadido el zero acoftumbrado ferà 830. que multiplicado por el 2. de la primera columna, es el producto 1660.

2	a. 830	1660

por quien fe avia de partir el refiduo fegundo, lo que no fe puede por fer efte menor que el partidor, con que no es meneiter continuar la tabla, fi folo añadir vn zero al denominador 3. del quadrado de la raiz, y otro a fu denominador, y ferà la raiz mas proxima que antes 8. y 30. centefsimas.

Para aproximar aun mas la raiz hallada; añado otros dos zeros al refiduo fegundo; y ferà 110000. y difpongo la tabla, como fe figue.

2	a. 8300	16600	b1. 6	99600
			b2. 36	36
				99636

En la qual pongo enfrente de *a*, las tres cifras halladas de la raiz, fin hazer cafo del denominador; y es *a* 8300. que multiplicado por 2. fale el partidor 16600. parto por efte el refiduo fegundo 110000. y fale el quociente 6. que puefto fobre la raya al lado del numerador del quebrado fobredicho, haze 306. a cuyo denominador fe añade vn zero; y es el quebrado 306. milefimas; y concluida la tabla, refto la fuma de la quinta columna del refiduo fegundo, y fale el refiduo tercero; y es la raiz aproximada 8. y 306. milefimas; y afsi fe puede aproximar infinitamente, de fuerte, que la diferencia de la raiz hallada, a la que avia de fer verdadera, fea menor que qualquiera cantidad determinada por pequeña que fea.

De-

Demonstr. En el exemplo propuesto lo mismo es añadir dos zeros al 5. residuo primero, que multiplicarle por el quadrado numerico 100. luego (9.) la raiz del sobredicho residuo aumentado con los dos zeros, la qual es 3. procede de la multiplicacion de la raiz que se busca, por 10. raiz de 100. Luego el 3. se avrà de partir por 10. para reducirle al estado que tenia antes de la multiplicacion: partiendo, pues, la cifra hallada 3. por 10. serà 3. dezimas: luego la segunda cifra que aproxima la raiz, es 3. dezimas. Tambien como el residuo segundo sea parte del primero, aviendose este multiplicado por 100. tambien lo estarà dicho residuo segundo, y añadiendole dos zeros mas para la segunda aproximacion, quedarà multiplicado por el quadrado numerico 10000. con que la raiz que de este se sacare, serà [9.] el producto de la que se busca por 100. raiz de 10000. luego reducida por particion serà 30. centesimas; y assi de las demàs, y lo mismo en otras qualesquiera raizes.

CAPITULO III.

DE LAS RAYZES DE LOS QUEBRADOS.

Como multiplicar vn quebrado por otro sea multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, como dixe en la Arithmetica Inferior, se sigue, que el quadrado de vn quebrado, serà el producto que sale de la multiplicacion del numerador de dicho quebrado por sì mismo; y del denominador tambien por sì mismo; y el quebrado que se multiplicò en dicha forma, serà la raiz; y lo mismo respectivamente en las demàs potestades; de que se colige ya bastantemente la regla para sacar las raizes de los quebrados, que es la siguiente.

PROP. XII. Problema.

Sacar qualquiera raiz de vn quebrado.

Operacion. Saquese la raiz que se pidiere del numerador del

quebrado propuesto; saquese tambien del denominador, y formese de entrambas vn nuevo quebrado, haziendo sirva la primera de numerador, y la segunda de denominador; y este nuevo quebrado será la raiz que se pide, como consta de lo arriba dicho.

Exemplo. Pidese la raiz quadrada de 9. 25. avos: La raiz de 9. es 3. la de 25. es 5. Digo, pues, que la raiz quadrada que se pide es 3. quintos. Pidese la raiz cubica de 8. 125. avos: la raiz cubica de 8. es 2. la de 125. es 5. con que la raiz cubica que se busca es 2. quintos; y assi de las demàs potestades.

PROP. XIII. Problema.

Sacar qualquiera raiz de entero, y quebrado.

OPeracion. Reduzgase el entero al quebrado que le acompaña, multiplicando el entero por el denominador, y añediendole à la suma el numerador, con que quedarà formado vn nuevo quebrado: saquese la raiz de este por la Prop. antecedente, y esta serà la que se pide.

Exemplo. Pidese la raiz quadrada de 930. y vn quarto: hecha la reduccion serà 3721. quartos: la raiz quadrada del numerador es 61. la del denominador es 2. con que la raiz que se busca es 61. medios, que son 30. enteros y medio: pidese la raiz cubica de 15. y 5. ochavos; hecha la reduccion del entero al quebrado, en la forma dicha, es 125. ochavos: saco la raiz cubica de 125. y hallo ser 5. y assimismo saco la raiz cubica de 8. y hallo ser 2. Digo, pues, que la raiz cubica, que se pide es 5. medios: esto es, 2. y medio; y assi de las demàs. Todo lo dicho es facil, pero es menester observar lo contenido en las Proposiciones siguientes.

PROP. XIV. Theorema.

Puede suceder que vn quebrado sea quadrado, cubo, &c. y que los terminos, con que se expressa no lo sean.

EL quebrado AB es quadrado, y sus terminos 4. y 6. son quadra- A $\frac{4}{9}$ B C 3. D $\frac{12.}{27.}$ E

dos

dos que tienen raiz justa: Multipliquese tanto el numerador, como el denominador por qualquiera numero C, que no sea quadrado, y saldràn los numeros D, y E, que como se vè, no son quadrados; y ni lo pueden ser, como demuestra el P. Clavio sobre la Propos. 2. del lib. 9. de Euclid. y el P. Dechales en la Propos. 11. del libro 3. de la Arithm. y como el quebrado DE sea igual al quebrado AB, como dixe en la Arithmetica Inferior, lib. 2. Propos. 1. se sigue, que assi como AB es quadrado, tambien lo es DE, aunque no conste de numeros quadrados; de que se colige, que aviendo de sacar la raiz quadrada de vn quebrado, serà menester examinar primero, si es, ò no, quadrado, lo que se haze por la Proposicion siguiente; y assi en las demas potestades.

PROP. XV. Problema.

Conocer si vn quebrado, que no consta de terminos quadrados, ò cubicos, &c. es, ò no es, quadrado, ò cubo, &c.

1. PAra conocer si vn quebrado, que no està en terminos quadrados, es quadrado, se multiplicarà el numerador por el denominador; y si el producto tiene raiz racional, ò precisa, el quebrado serà quadrado; pero si no la tuviere, no lo serà.

Exemplo. Sea el quebrado 12. veinte y siete avos, que no està en terminos quadrados, y se desea saber, si es quadrado: Multipliquese el numerador 12. por el denominador 27. y saldrà el producto 324. cuya raiz quadrada es justamente 18. Digo, pues, que el quebrado propuesto es quadrado.

Esta regla, dicha en vna palabra, consiste, en que entonces vn quebrado es quadrado, quando entre sus terminos se puede hallar vn medio Geometrico proporcional, porque si del producto de sus terminos se puede sacar raiz quadrada justa, esta serà medio proporcional entre dichos terminos.

Demonstr. En el exemplo propuesto, el producto de 12.

y 27. es igual al producto 18. por sì mismo; porque entrambos son 324. luego [16. 6. Eucl.] las tres cantidades 12.18.27. son continuas proporcionales; luego los numeros 12. y 27. son planos semejantes, (7.lib.1.) supuesto que entre ellos ay vn medio proporcional; y como los planos semejantes (8.lib.1.) tengan entre si la razon que algun quadrado à otro, es constante avrà dos quadrados, que tendràn entre sì la misma razon de 12. à 27. luego de estos quadrados se podrà formar vn otro quebrado igual al sobredicho [1.lib.2.Arithm.Inferior] el qual constarà de terminos quadrados; y por consiguiente serà quadrado.

Pero si el producto del numerador de vn quebrado por su denominador careciere de raiz justa, dicho quebrado no serà quadrado, ni se podrà reducir à terminos quadrados.

Exemplo. Sea el quebrado 6. quinze avos; multiplicando 6. por 15. es el producto 90. cuya raiz 9. no es justa: Digo, pues, que dicho quebrado no se puede proponer en terminos quadrados.

Demonstr. Si el quebrado sobredicho se pudiesse proponer en terminos quadrados, la misma razon que ay de 6. à 15. avria entre los tales quadrados: luego (*Corol.1.Prop. 7. lib.* 1.) entre 6. y 15. podria aver vn medio proporcional; y por consiguiente, el quadrado de este medio seria igual al producto de 6. por 15. que es 90. luego 90. tendria raiz justa, contra lo supuesto; luego el quebrado sobredicho no puede expressarse con numeros quadrados.

2. Para conocer si vn quebrado, que no està en terminos cubicos es cubico, se multiplicarà el quadrado del numerador por el denominador; y si el producto tuviere raiz cubica justa, se podrà reducir el quebrado a terminos cubicos.

Exemplo. El quebrado 16. 250. avos no està en terminos cubicos, y quiero averiguar si se puede reducir a ellos. El quadrado de 16. es 256. que multiplicado por el denominador 250. es el producto 64000. cuya raiz cubica justa es 40. Digo, pues, que se puede reducir a terminos cubicos.

3. Sea regla general en todas las potestades, para averi-

riguar si vn quebrado, que no està en terminos de quienes se pueda sacar justamente la raiz propria de aquella potestad, se puede reducir à ellos, se multiplicarà la potestad del numerador inmediata menor à la del quebrado, por el denominador del mismo quebrado; y si del producto se puede sacar raiz justa, se podrà reducir el quebrado à dichos terminos; como para averiguar si se puede expressar con terminos quadrado-quadrados, se multiplicarà el cubo de su numerador por el denominador: Si se quisiere saber, si se puede reducir à terminos de primo relato, se multiplicarà el quadrado-quadrado de su numerador por el denominador; y assi en las demàs potestades, y si del producto se puede sacar raiz justa de aquella potestad, à que se desean reducir los terminos del quebrado, serà possible dicha reduccion; y al contrario, si el producto careciesse de dicha raiz precisa, no serà possible.

Demonstr. La regla sobredicha para conocer si vn quadrado es cubico, consiste en averiguar, si entre el numerador, y denominador, puede aver dos medios proporcionales, porque si les puede aver, seràn dicho numerador, y denominador solidos semejantes, (13. lib. 1.) y siendo solidos semejantes, tendràn (14. lib. 1.) la misma razon que vn cubo à otro cubo: luego, formando vn quebrado nuevo de estos cubos, serà el quebrado cubico, y expressado en terminos cubicos: De esta suerte se demonstrarà lo mismo en las demàs potestades; porque si entre los terminos del quebrado se pueden hallar tres medios proporcionales, serà el quebrado quadrado-quadrado; si quatro, serà primo relato, &c. los quales medios se hallan del modo que la regla dada prescrive, como despues veremos; luego la regla dada es infalible.

PROP. XVI. Problema.

Reducir vn quebrado à terminos quadrados, cubicos, quadrado-quadrados, ù de otra qualquiera potestad.

AViendo conocido por la Proposicion antecedente, si vn quebrado, que no està en los terminos de vna potes-

testad, es, ò no reducible à ellos, se reducira el quebrado à los minimos terminos, los quales seran quadrados, ò cubicos, ù de la potestad, a quien se huvieren hallado reducibles.

Exemplo. El quebrado 12. veinte y siete avos, no està en terminos quadrados; pero por la Prop. passada, se halla ser reducible à ellos: Reduzgole, pues, à sus minimos terminos, y hallo ser 4. novenas, que son terminos quadrados. Tambien el quebrado 16. 54. avos no esta en terminos cubicos; pero por la regla de la Propos. passada, me asseguro poderse reducir à ellos: Reduzgole, pues, à sus minimos terminos, y veo ser 8. 27. avos, que son terminos cubicos, y su raiz cubica es 2. tercios; y assi en las demàs potestades.

Demonstr. Siendo reducibles los terminos de vn quebrado à quadrados, es cierto son planos semejantes; y que entre ellos puede aver vn medio proporcional, como consta de lo dicho en la Proposicion passada: luego reducidos a los minimos terminos, los estremos seran numeros quadrados: [*Color. Prop.* 3. *lib.* 1.] Asimismo, siendo los terminos de vn quebrado reducibles à cubicos, seràn solidos semejantes: luego entre ellos podrà aver dos medios proporcionales, y reducidos à los vltimos terminos, seran numeros cubicos; y assi en las demas potestades, como consta del Corolario citado.

Si el quebrado propuesto no estuviere en terminos quadrados, cubicos, ù de otra qualquiera potestad, ni se pudiere reducir à ellos, se sacaria la raiz proxima del numerador; y asimismo la del denominador, y de ellas se formaria el quebrado, que seria raiz proxima del propuesto.

PROP. XVII. Problema.

Examinar las raizes halladas de qualquiera potestad.

REgla general. Si la raiz quadrada, cubica, &c. que se hallò fuere justa, se formarà de ella por multiplicacion el quadrado, cubo, ò aquella potestad, cuya fuere dicha raiz; y si se ha obrado bien, saldrà el numero mismo de quien se sacò aquella raiz; como si la raiz quadrada de

55225.

55225. se hallò ser 235. para hazer el examen de la operacion, se multiplicaràn 235. por sì mismos, y hallando que el producto es 55225. serà señal averse obrado con acierto; assimismo la raiz cubica de 75686967. se hallò ser 423. cubiquense, pues, 423. multiplicandoles por sì; y el producto otra vez por 423, y saliendo el mismo numero, estarà bien sacada la raiz, y assi en las demàs potestades.

Si la raiz no fuere justa, si que sobrare algun residuo, se obrarà de la misma suerte, multiplicando en la forma dicha la raiz hallada, hasta sacar la potestad à quien pertenece, y añadiendo à la suma el residuo, porque hecho esto, resultarà el numero de quien se sacò la raiz; pero se ha de advertir que el residuo jamàs ha de ser mayor que los planos, ò solidos, ò productos que expressan las dos primeras columnas de las tablas proprias de aquella potestad: como por exemplo la tabla Analytica propria del quadrado tiene en las dos primeras columnas, lo que se vè en el num. 1. Digo, pues, que el residuo que sobra despues de sacada la raiz quadrada, no ha de exceder al duplo de la misma raiz: assimismo las primeras columnas de la tabla, que sirve para la extraccion de la raiz cubica, son las que se vèn en el num. 2. y assi digo, que el residuo no ha de exceder à la suma del triplo del quadrado de la raiz, y del triplo de la misma raiz. Las columnas puestas en el num. 3. son las propias para la raiz quadrado-quadrada; con que el residuo no ha de exceder à la suma hecha de quatro cubos, 6. quadrados de la raiz, y del quadruplo de la misma raiz. La razon se colige de la misma composicion de las potestades.

Num. 1.

2	a

Num. 2.

3	a2.
3	a1.

Num. 3.

4	a3.
6	a2.
4	a1.

Advierto, que si el sobredicho residuo fuere igual, ò mayor que la raiz hallada, la raiz menor que la verdadera serà la mas exacta, pero si el residuo fuere menor, la raiz que es mayor que la verdadera, serà mas precisa que la menor, como demuestra el P. Miliet en la Prop. 9. lib. 3. de la Arithmetica.

LIBRO III.

DEL USO DE LAS RAIZES, y poteſtades numericas.

SON innumerables los Problemas que ſe reſuelven por las poteſtades numericas, y por la extraccion de ſus raizes; de las quales ſolo propondrè en eſte libro las que fueren mas proprias de eſte lugar, con que pueda exercitarſe el Arithmetico, dexando las demas para el tratado ſiguiente.

PROP. I. Problema.

Entre dos numeros dados, hallar vn medio Geometrico.

OPeracion. Multipliquenſe entre sì los numeros dados, y ſaqueſe la raiz quadrada del producto, y eſte serà el medio Geometrico que ſe pide.

Exemplo. Pideſe vn medio Geometrico entre 6. y 54. multiplico 54. por 6. y del producto 324. ſaco la raiz quadrada que es 18. y eſte es el medio que ſe buſca, y ſeràn continuos proporcionales 6. 18. 54. la razon es, porque en tres proporcionales, el producto de los eſtremos es igual al quadrado del medio: [*Arithm. Infer. lib.4. Prop.3.*] luego la raiz de dicho producto es el medio que ſe buſca.

Si del producto de los numeros dados no ſe pudiere ſacar raiz quadrada juſta, ſerà ſeñal no poder aver entre ellos dicho medio proporcional.

PROP. II. Problema.

Entre dos numeros dados, hallar quantos medios Geometricos proporcionales ſe quiſieren.

REgla general. Eſcrivanſe los numeros dados en vna linea; pero tan diſtantes, que entre vno, y otro, ſe pue-

puedan poner à distancia competente tantos puntos como medios proporcionales se pidieren. Al primer numero de los dados se le pondra el caracter *a*, y al otro *b*; debaxo de cada punto se pondràn entrambas letras *a*, y *b*, lado por lado, à quienes se añadiràn los exponentes acostumbrados en esta forma: à la primera *a* de mano derecha se le darà el exponente 1. à la segunda 2. &c. y al contrario à la primera *b* de mano izquierda, se le darà el exponente 1. à, la segunda 2. &c. con esto queda notado como en cifra todo lo que se ha de obrar; porque a1. b2. significa que el numero notado con *a*, se ha de multiplicar por el quadrado del numero denotado por la letra *b*: assimismo, si se hallare a2. b3. significarà que el quadrado de *a*, se ha de multiplicar por el cubo de *b*, y assi de las demas. Para hallar, pues, qualquiera medio, sin dependencia de los otros, se multiplicaràn las potestades numericas de los numeros dados en la forma dicha, y del producto se sacarà la raiz que tenga por exponente la suma de los exponentes de entrambas letras, que en todos es vna misma: Esto se haze facil con los exemplos siguientes.

Exemplo 1. Pidense dos medios proporcionales, entre los numeros 5. y 135. disponiendo los numeros dados, y sus potestades, segun la regla, tienen la disposicion siguiente.

5	.	.	135.
a	a2.b1.	a1.b2.	b.

Hecho esto, puedo sacar el primer medio, ò el segundo, sin dependencia del otro; supongo, pues, se quiera sacar el primero, expressado en a2. b1. multiplico, pues, 25. significado en a2. por 135. significado en b1. y es el producto 3375. y porque sumados los exponentes de dichas letras hazen 3. que es exponente del cubo, saco la raiz cubica de dicho producto, y hallo ser 15. y este es el primer medio proporcional: para hallar el segundo medio bastarà partir el primer medio hallado 15. por el primer termino 5. y el quociente 3. serà el denominador de la proporcion; y multiplicando 15. por 3. el producto 45. serà el segundo medio; pero si se quiere sacar el segundo, sin de-

dependencia del primer medio, ſe obrarà como antes, multiplicando 5. ſignificado en a^1. por 18225. ſignificado en b^2. que es el quadrado de 135. y ſacando la raiz cubica del producto 91125. ſe hallarà ſer 45. el medio ſegundo; y ſon los quatro continuos proporcionales 5. 15. 45. 135.

Exemplo 2. Pidenſe quatro medios proporcionales entre los numeros 5. y 1215. diſpueſtos ſegun la regla, tendràn la forma ſiguiente.

5					1215.
a	$a^4.b^1$.	$a^3.b^2$.	$a^2.b^3$.	$a^1.b^4$.	b.

Supongamos quiero ſacar el primer medio: multiplico, pues, el quadrado-quadrado de 5. ſignificado en a^4. por el numero dado 1215. ſignificado en b^1. y porque la ſuma de los exponentes es 5. ſacarè la $\sqrt{}$ 5. del producto 759375. y hallarè ſer 15. medio primero, que ſe buſca.

Hallado el primer medio, ſe pueden hallar los demàs, partiendo el medio hallado por el primer termino, y ſaldrà en el quociente el denominador de la proporcion, con que multiplicando el primer medio hallado por dicho denominador, el producto ſerà el ſegundo medio, y multiplicando el ſegundo por el miſmo denominador, ſe hallarà el tercero; y aſsi de los demas.

Pero ſi ſe quiſiere hallar otro qualquiera, como por exemplo el ſegundo ſin dependencia de los otros, ſe obrarà como antes: multiplicarè, pues, el cubo de 5. ſignificado en a^3. por el quadrado de 1215. ſignificado en b^2. y la $\sqrt{}$ 5. darà el ſegundo medio 45. y aſsi de los demàs.

Demonſtr. En el exemplo primero, entre el cubo de 5. y el cubo de 135. ay dos medios proporcionales, que como demonſtrè en la Prop. 12. del lib. 1. y ſus Corolarios, ſon los ſolidos ſiguientes, que con los extremos forman quatro continuos proporcionales.

a^3. $a^2.b^1$. $a^1.b^2$. b^3.

Luego (15.) las raizes de eſtos ſolidos tambien ſeràn continuos proporcionales; eſto es, 5. 15. 45. 135. luego 15. y 45. ſon los medios que ſe buſcan: De la miſma manera ſe

se demonstrarà lo mismo en el segundo exemplo; y otros qualesquiera en que se hallen muchos mas medios proporcionales.

Si la raiz que se saca de los productos sobredichos no pudiere ser justa, serà cierto no poder hallarse entre los numeros dados aquellos medios proporcionales, que se piden.

PROP. III. Problema.

Reducir vna figura rectangula prolongada à quadrado.

ESte Problema se resolviò por Geometria en el Tratado primero, hallando vna linea media proporcional entre el lado mayor, y menor del rectangulo. Por numeros se resuelve del modo siguiente: en vn salon ay vnà ventana prolongada, que tiene ocho palmos de ancharia, y doze y medio de altura, la qual se ha de cerrar, y se ha de abrir otra quadrada, de suerte, que entre por ella la misma luz, pidese quantos palmos avrà de tener cada lado.

Operacion. Hallese vn medio proporcional entre los lados 8. y 12. y medio de la ventana prolongada, multiplicando 12. y medio por 8. y del producto 100. sacando la raiz quadrada 10. y se dira, que la ventana quadrada ha de tener 10. palmos por cada lado: La razon es clara, porque con esto tendrà la ventana quadrada 100. palmos de luz, como tenia la otra.

PROP. IV. Problema.

Resuelvense algunas questiones de interesses.

QUestion 1. Un Tratante diò 3000. ducados à cambio por quatro años, con tal condicion, que la ganancia de cada año, ganasse al mismo respecto que el principal: cumplidos quatro años, le dieron entre caudal, y ganancia 3993. ducados. Pidese, que le avian de dàr el año tercero, si se huviera concluido el Tratado en esse año.

Operacion. Las cantidades competentes à cada año, forman vna progression Geometrica de quatro terminos proporcionales; de los quales se dà el primero, que es 3000. y el

el vltimo, que es 3993. y faltan los dos medios: hallanse, pues, [2.] disponiendo los terminos en la forma siguiente.

3000.	.	.	3993.
a.	a2. b1.	a1. b2.	b.

Y porque se pide la cantidad competente al año tercero, que es el termino tercero notado con a1. b2. multiplico el quadrado de *b*, que es 15944049. por *a*, que es 3000. y serà el producto 47832147000. y porque la suma de los exponentes es 3. saco la raiz cubica de dicho producto, y hallo ser 3630. Digo, pues, que en el tercer año se le avian de dàr 3630. ducados.

Question 2. En la propuesta sobredicha, se desea saber quanto ganò dicho tratante por 100. cada año.

Operacion. Dispuestos los terminos como antes, se hallarà el primer medio proporcional, que es el mas facil; y porque en su lugar ay a2. b1. multiplico el quadrado de *a*, que es 9000000. por *b*, que es 3993. y serà el producto 35937000000. saco la raiz cubica de este producto, y hallo ser 3300. y es la suma del caudal, y ganancia, quitado el caudal 3000. queda la ganancia 300. Digo, pues, por regla de tres; si 3000. ganan 300. luego 100. ganaràn 10. con que la ganancia es à razon de 10. por 100.

Question 3. En vna progresion Geometrica, dados los estremos, y el numero de los terminos, se pide el denominador de la proporcion, como por exemplo: Pedrò pagò vna deuda en cinco años; el primero pagò 4. escudos, el vltimo 2500. procediendo las pagas en vna misma proporcion, buscase qual sea esta proporcion. Hallase por qualquiera de los dos modos siguientes.

Modo 1. Supuesto que de los cinco terminos se ignoran los tres medios, hallanse estos por la Propos. 2. y hallado el primero medio, que serà 20. partase por el primer termino, que es 4. y el quociente 5. serà el denominador de la proporcion, con que las pagas procedieron en proporcion quintupla, como consta de lo dicho.

Modo 2. Partase el mayor estremo por el menor: esto es,

es 2500. por 4. y serà el quociente 625. quitese vno del numero de los terminos, ò años, que eran 5. y quedaràn 4. y este serà el exponente de la raiz que se ha de sacar del quociente 625. saquese, pues, la $\sqrt{}$4. de este numero, y se hallarà ser 5. que es el denominador de la proporcion que se desea.

Question 4. En la misma progression, dados los mismos terminos, se busca la suma de toda ella, que es en el caso propuesto toda la deuda.

Operacion. Hallese como antes el denominador de la proporcion, que es 5. y hallado este, se hallarà por la Propos. 27. lib. 5. de la Arithmetica Inferior, la suma de toda la progression en la forma siguiente: Restese el menor estremo 4. del mayor 2500. y el residuo 2496. partase por el denominador 5. menos la vnidad: esto es, por 4. y el quociente 624. serà la suma de la progression, menos el mayor estremo; añadase, pues, el mayor estremo 2500. y serà 3124. la suma de toda la progression, como en dicho lugar queda demonstrado.

PROP. V. Problema.

Dividir vn numero quadrado en quantos quadrados se quisieren.

1. Pidese, que el numero quadrado 49. se divida en dos numeros quadrados. *Operacion.* Escojanse por regla general los tres numeros quadrados 25. 16. 9. por ser de tal calidad, que la suma de los dos 16. y 9. es igual al quadrado 25. Dispongase vna regla de tres, diziendo: si 25. vienen de 9. luego 49. vendràn de 17. y 16. 25. avos, que serà vn quadrado parte de 49. Para hallar el otro quadrado, bastarà restar de 49. el quebrado hallado; pero si se quisiere obrar como en el primero, se dispondrà segunda regla de tres, diziendo: si 25. vienen de 16. luego 49. vienen de 31. y 9. 25 avos, y estos dos quadrados juntos, seràn iguales al 49.

Demonstr. En virtud de estas operaciones, la misma razon tienen los quadrados 9. y 16. con 25. que los dos nu-

meros hallados con 49. luego, siendo aquellos iguales à 25. seràn estos iguales à 49. y que estos sean numeros quadrados, es claro, por ser cada vno de ellos quarto proporcional à tres numeros quadrados.

De aqui se colige, que siendo dichos quadrados hallados proporcionales, con los que se suponian conocidos, tambien lo seràn sus raizes, y por consiguiente se podràn estas hallar por regla de tres, en la forma siguiente: si 5. dàn 3. luego 7. raiz de 49. daran 4. y vn quinto, raiz del primer quadrado hallado 17. y 16. 25. avos. Otra vez; si 5. dàn 4. luego 7. daràn 5. y tres quintos, raiz del otro quadrado 31. y 9. 25. avos.

2. Si se pide que el mismo numero quadrado 49. se divida en quatro numeros quadrados, se dividirà primero en los dos sobredichos; y luego se dividirà cada vno de ellos en otros dos, con la misma regla, y quedarà el 49. dividido en quatro quadrados; y de esta misma suerte se podra cada quadrado de estos dividir en otros dos, y assi infinitamente.

PROP. VI. Problema.

Hallar dos numeros quadrados, cuya suma sea tambien numero quadrado.

SUpongo lo que dixe en la Proposicion passada, que los dos numeros quadrados 16. y 9. sumados hazen 25. que es numero quadrado: esto supuesto, tomese qualquiera numero quadrado, como por exemplo, 36. y digase por regla de tres: si 9. dàn 16. luego 36. daràn 64. sumese este quadrado 64. con el 36. que se tomo arbitrariamente, y la suma 100. serà numero quadrado, como se ve, y consta de lo dicho.

PROP. VII. Theorema.

Pidense tres numeros, que la suma de ellos sea numero quadrado.

TOmense, ò hallense por la Proposicion antecedente dos numeros quadrados, que sumados hagan numero qua-

quadrado, y sean por exemplo 64. y 36. que sumados hazen el quadrado 100. hallese aora con el numero 100. por la misma Propos. passada, otro quadrado, que sumado con 100. sea la suma numero quadrado, y se hallarà ser 177. y 7. nueve avos: sumense los tres quadrados 36. 64. 177. y siete nueve avos, y la suma 277. y 7. nueve avos serà numero quadrado, como consta de lo dicho.

PROP. VIII. Problema.

Hallar dos, ò mas numeros, tales que sus quadrados sumados hagan vna vnidad.

TOmense dos numeros quadrados, que sumados hagan numero quadrado, como son 9. y 16. que sumados hazen 25. y formense dos quebrados, que tengan por denominador comun la raiz de la suma 25. que es 5. y por numeradores, el vno 3. raiz de 9. y el otro 4. raiz de 16. y seràn tres quintos, y quatro quintos; y estos son los que se piden, porque sus quadrados son 9. veinte y cinco avos, y 16. veinte y cinco avos, cuya suma es 25. veinte y cinco avos, que es vna vnidad.

Si se pidieren tres numeros, cuyos quadrados sumados hagan la vnidad, se buscaràn por la antecedente tres numeros quadrados, cuya suma sea numero quadrado, como son 9. 16. 144. cuya suma 169. es quadrado, que tiene por raiz 13. formense aora los tres quebrados, cuyo denominador sea 13. y los numeradores 3. 4. 12. raizes de los tres quadrados sobredichos, y la suma de sus quadrados serà la vnidad, como consta de la misma operacion.

PROP. IX. Problema.

Resolucion de algunas questiones por extraccion de raizes.

QUestion 1. Aviendo entrado en vn Jardin, cogì trecientas mançanas, y al salir encontrè vnos niños, que me pidieron les diesse algunas; yo por conten-

tarles dì à cada vno tantas mançanas, como avia niños, y me ſobraron onze que llevè ſolamente à mi caſa: pido al Arithmetico, determine quantos eran los niños: Digo, que lo podrà determinar con facilidad, porque ſi llevaba 300. y de eſtas ſolamente me quedaron 11. luego reſtando 11. de 300. el reſiduo 289. ſerà el numero de las mançanas que repartì; y ſupueſto que cada niño tomò tantas quantos eran ellos, ſi de dicho numero 289. ſe ſaca la raiz quadrada 17. eſte ſerà el numero de los niños que ſe pide.

Queſtion 2. Avia en Theſalia vna Vega muy amena, llamada *Tempe*, à quien regaba el Rio Peneo; ſu figura era paralelograma HF (fig. 4.) cuyo lado LF conſtaba de 240. *Toiſes*, ò exapedas; y el lado FG de 135. En medio de ella avia vn Jardin BE, cuya longitud AE, era dupla de ſu latitud AB; y ocupaba la mitad de la Vega: pideſe, que de eſtas premiſas ſe infiera la determinada longitud, y latitud del Jardin.

Operacion. Multipliqueſe FG 135. por LF 240. y ſe hallarà ſer toda la area de la Vega 32400. cuya mitad 16200. ocupa el Jardin; y por quanto ſu longitud AE es dupla de ſu latitud AB, conſtarà ſu area de dos quadrados iguales BI, KE: luego cada vno ſerà de 8100. exapedas; ſaqueſe la raiz quadrada de 8100. y ſe hallarà ſer 90. y eſta es la cantidad de AB, y de AI; luego AB es 90. exapedas; AE 180. y ſi ſe reſtan 180. de HG 240. ſerà el reſiduo 60. cuya mitad 30. es DA; y aſsimiſmo, reſtando AB 90. de FG 135. ſerà el reſiduo 45. cuya mitad 22. y medio ſerà AC.

Queſtion 3. Se ha de eſcalar vn muro, cuya altura es de 48. palmos, à cuyo pie ay vn foſo de 12. palmos de ancho: pideſe, quan altas han de ſer las eſcaleras, para que pueſtos ſus pies 12. palmos apartados del muro, vengan juſtas à la ſobredicha altura.

Operacion. Quadrenſe los 48. palmos, que es la altura del muro; y ſerà el quadrado 2304. palmos; quadrenſe los 12. de la ancharia del foſo, y ſeràn 144. ſumenſe entrambos quadrados; y de la ſuma, que es 2448. ſaqueſe la

la raiz quadrada, y se hallarà ser 49. palmos, y casi medio, y esta ha de ser la largaria de cada escalera, consta de la Prop.47. lib.1. Eucl.

Question 4. Se ha de escalar vn muro, cuya altura es 48. palmos; las escalas tienen de largo 50. palmos: pidese, quan apartados del muro se han de poner sus pies, para que justamente lleguen à lo mas alto del muro?

Operacion. Quadrense, como antes, los 48. pies del muro, y serà su quadrado 2304. quadrese 50. que es la largaria de la escala, y serà su quadrado 2500. restese el primer quadrado de este segundo, y serà el residuo 196. saquese su raiz quadrada, y se hallarà ser 14. y digase, que los pies de las escaleras han de estàr apartadas del muro 14. palmos.

Question 5. En vna sala ay vna ventana quadrada, que tiene 4. palmos por cada lado: importa crecer esta ventana, de suerte, que quedando quadrada entre por ella doblada luz: pidese, quantos palmos ha de tener por cada lado.

Operacion. Quadrense los 4. palmos que tiene por lado la ventana, y seràn 16. y porque se ha de crecer de modo que reciba doblada luz, doblese el 16. y serà 32. saquese la raiz quadrada de 32. y serà 5. y casi dos tercios, y este ha de ser el lado de la ventana que se pide.

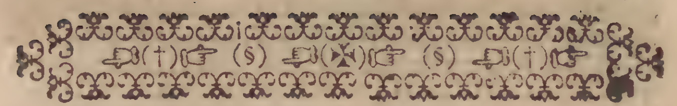
Question 6. Ay otra ventana quadrilonga, que tiene de alto 6. palmos, y de ancho 4. y se pide otra que entre por ella doblada luz, y que sus lados conserven la misma razon de 6. à 4. dudase quan grandes ayan de ser dichos lados.

Operacion. Quadrense los 6. palmos que tiene de alto la ventana, y serà su quadrado 36. quadrense tambien los 4. palmos que tiene de ancho, y seràn 16. y porque ha de admitir doblada luz: dupliquense entrambos quadrados, y serà el primero 72. y el segundo 32. saquense sus raizes quadradas; y serà la del primero 8. y ocho diez y siete avos proximamente; y la del segundo 5. y onze diez y siete avos con poca diferencia: Digase, pues, que ha de tener de alto 8. palmos, y ocho diez y siete avos, y de ancho 5. y onze

diez y siete avos. Tambien se puede hallar la ancharia despues de hallada la altura por regla de tres: si 6. dàn 4. luego 8. y ocho diez y siete avos daràn 5. y onze diez y siete avos. De lo dicho se puede colegir el modo de resolver otras muchas questiones.



TRA-



TRATADO V. DE LA ALGEBRA,

O ARTE ANALYTICA.



ES tanta la ſutileza, y primor de la Algebra, que ſe mereciò el nombre de *Divina*, con que algunos la ennoblecieron: Llamanla comunmente, *Arte Analytica*, de la voz Griega *ANALYTICIN*, que ſignifica *Reſolucion*, por ſer vnicamente ſu empleo, hallar, y hazer patente la cantidad, que ſe propuſo eſcondida en los intrincados laberintos de vna queſtion, con tal artificio, que es ſin comparacion mayor la ſutileza que la reſuelve, que la ſagacidad que la compuſo. Llamaronla los Arabes *Algebra*, que es tanto como *Reſtauracion*, y *Almucabula*, que es opoſicion, porque oponiendo vnas cantidades à otras, cuida de conſervar ſiempre entera ſu igualacion.

Juzgan algunos fue ſu inventor S. Dionyſio Areopagita; otros, que Mahomet Arabe, hijo de Moyſes; otros, que Gebro, Aſtronomo Arabe, de quien dizen tomò el nombre de *Algebra*; pero lo mas cierto es, que ſu primer Autor fue Diophanto Alexandrino, que es muy probable floreció en el ſiglo primero de nueſtro Redemptor Jeſu Chriſto.

Es, pues, la *Algebra* vn Arte que enſeña à hallar qualquiera cantidad, reſolviendo la queſtion propueſta, por los miſmos terminos, con que ſe compuſo. De que ſe colige ſer ſu objeto mas vniverſal que el de la Geometria, y Arithmetica,

ca, pues contrayendose aquella à la cantidad continua; y estrechandose esta à la discreta, se estiende la Algebra, sin limitacion à entrambas, à quienes enriqueze con nuevos Theoremas, y Problemas.

Dividese yà comunmente la *Algebra* en *vulgar*, y *especiosa*: la *vulgar*, à quien tambien llaman *numerosa*, exercita su logistica en los numeros vulgares, y conocidos, hasta encontrar la igualacion con algunos caracteres incognitos. La *especiosa*, substituye en lugar de numeros, y de qualesquiera magnitudes las letras del Abecedario, hasta hallar la igualacion que se pretende. Reconoce esta por su Autor à Francisco Vieta, perito Mathematico: ambas tienen vn mismo fundamento, porque tanto la vna como la otra, se funda en las progressiones Arithmetica, y Geometrica; y aunque gran parte de las operaciones se facilita con la methodo de la especiosa, pero ayuda mas la imaginacion de los principiantes la numerosa, y assi vsarèmos de la vna, y de la otra, segun pareciere mas conveniente.



LIBRO I.

DE LA LOGISTICA DE LOS Caracteres.

DEFINICIONES.

1. *Logistica de los Caracteres*, son las quatro reglas de sumar, restar, multiplicar, y partir, que en ellos se exercitan, en que conviene este el Analysta muy versado, para que en lo demàs pueda lograr el acierto.

2. Vsan los Algebricos de ciertos señales, y caracteres para expressar las magnitudes, y las operaciones, que con ellas

ellas se exercitan, cuyo conocimiento es el primer passo en esta materia. Las magnitudes que se dàn, ò suponen conocidas, se expressan, ò con numeros, ò con algunas de las primeras letras del Abecedario: Las magnitudes incognitas, ò que se buscan, se denotan con las vltimas.

3. El signo +, significa la suma que se ha de hazer de dos cantidades; y assi, para significar que vna magnitud, llamada *v*, se ha de sumar con otra, llamada *z*, se escrive $v + z$. El signo ---, sirve para denotar, que la magnitud siguiente à dicho signo, se ha de restar de la que le precede; como para denotar, que la cantidad notada con *y*, se ha de restar de la significada por *x*, se escrive $x - y$.

4. El signo +, se llama *mas*, y el signo ---, se llama, *menos*: El signo +, se omite, quando se ha de dàr principio à vna expresion literal; y assi se escrive $a - b$, en lugar de $+ a - b$; assimismo se suele suprimir la vnidad antes de las letras, y se escrive *a*, en lugar de $1a$, y *c*, en lugar de $1c$.

5. La cantidad que lleva antes de sì el signo ---, se llama *cantidad negativa*, *defectiva*, *ò falsa*; y todas las que no son negativas, se llaman, *positivas*, *ò reales*. Las magnitudes positivas, son mas que nada; pero las negativas, son menos que nada, como verèmos en las notaciones, puestas al fin del Capitulo 2.

6. Las cantidades, cuyas partes, ni vàn vnidas con el signo +, ni separadas con el signo ---, se llaman *absolutas*, è *incomplexas*; y todas las demàs se llaman *compuestas*, y *complexas*; y los mismos nombres tienen los caracteres, que las expressan.

7. Los caracteres son *semejantes*, quando la letra, y el exponente es el mismo, aunque los numeros que les preceden sean diferentes; como $6a2$. $15a2$. *diferentes*, ù *desemejantes*, son, quando la letra, ò el exponente fueren diferentes, aunque en lo demàs concuerden: como $x2$. y $x4$. son diferentes caracteres, por ser sus exponentes diferentes, aunque la letra es la misma; y assimismo, $b2$. $z2$. son diferentes, aunque el exponente es el mismo.

CA-

CAPITULO I.

DE LA LOGISTICA DE LOS CARACTERES incomplexos.

PROP. I. Problema.

Sumar caracteres incomplexos.

EN el ſumar caracteres incomplexos, pueden ocurrir tres caſos, porque,ò los caracteres ſon todos ſemejantes, ò todos deſemejantes; ò vnos ſemejantes, y otros deſemejantes.

Caſo 1. Si los caracteres ſon todos ſemejantes, y llevan vn miſmo ſigno, ſe ſumaràn llanamente los numeros que les precede, y deſpues à la ſuma, ſe le pondrà el miſmo caracter, y ſigno, como ſe vè.

--- a	+ 3 b
--- a	+ 9 b
--- 2 a	+ 12 b

Pero ſi llevan diferentes ſignos, en lugar de ſumar, ſe reſtarà el menor del mayor, y al reſiduo ſe le pondrà el ſigno del mayor, como ſe vè en los exemplos ſiguientes.

Exemplo 1.	*Exemplo* 2.	*Exemplo* 3.	*Exemplo* 4.
--- 10 a	+ 8 a	+ 4 b	--- 2 b
+ 12 a	--- 6 a	--- 7 b	+ 2 b
+ 2 a	+ 2 a	--- 3 b	0

La razon es,porque en el primer exemplo,añadir menos 10. à 12. es lo miſmo que quitar 10. de 12. luego la ſuma ſerà + 2. y aſsi en el ſegundo, y tercero; pero en el vltimo el menos 2. deſtruye al mas dos; y aſsi la ſuma es nada.

Caſo

Caso 2. Si los caracteres son todos diferentes, y antes de sì no llevan signo alguno, ò llevan el signo +, se suman con el signo +, poniendo el vno al lado del otro, y en medio de ellos el signo sobredicho; y assi, para sumar *a* con *b*, se escrivirà *a* + *b*; para sumar + *c* con *b*, se escrivirà *b* + *c*: pero para sumar — *a* con *b*, se escrivirà *b* — *a*, y esto es la suma: en vna palabra, se escrivirà el vn caracter al lado del otro con el mismo signo, que expressa, ò tacitamente lleva.

Caso 3. Si concurrieren algunos caracteres semejantes, y otros desemejantes, se sumaràn los semejantes, como en el Caso 1. y los desemejantes se juntaràn con el signo +, ò — como se dixo en el Caso 2. todo se vè en los exemplos siguientes.

Exemplo 1.	*Exemplo* 2.	*Exemplo* 3.
2 a2.	5 a —	3 a
4 a2.	10 a	2 a
5 a3.	6 b	— 2 b
3 a3.	2 z	— b
6a2 + 8a3.	15 a + 6b + 2z.	5.a — 3.b.

PROP. II. Problema.

Restar caracteres incomplexos.

EN el restar caracteres incomplexos, se pueden ofrecer quatro casos principales; porque, ò los caracteres, y signos son semejantes, y el inferior lleva menor numero, ò son semejantes, y el inferior tiene mayor numero, ò los caracteres son desemejantes, y los signos diferentes, ò los caracteres son diferentes.

Caso 1. Quando los caracteres, y signos son semejantes, y el inferior tiene menor numero, restese el inferior del superior, y al residuo pongasele el mismo caracter, y signo: como, si de 15*a*. se han de restar 5*a*. el residuo serà 10*a*.

Caso 2. Quando los caracteres, y signos son semejantes, y el inferior lleva mayor numero que el superior, se restarà al reves, el superior del inferior, y al residuo se le pondrà

drà el signo contrario: como, si de $8b$. se han de restar $12b$. el residuo serà $-4b$. si de $4m$. se han de restar $6m$. el residuo serà $-2m$. La razon es clara: supongase que m es 5. con que $4m$. serà 20. y $6m$. serà 30. y si quien debe 20. paga 30. no ay duda, que despues de la paga tiene 10. menos de lo que avia de tener, por aver pagado 10. mas de lo que debia pagar; luego la resta $-2m$. esto es, menos 10. es legitima.

Asimismo, si de -3. se ha de restar -7. el residuo es $+4$. por la razon sobredicha; y si de $-2a$. se ha de restar $-3a$. el residuo serà $+a$.

Caso 3. Quando siendo semejantes los caracteres, los signos fueren diferentes, en lugar de restar, se sumaràn entrambas partidas; y à la suma se pondra el signo del superior: como, si de $+4a$. se ha de restar $-2a$. la resta serà $+6a$. asimismo, si de $-8b$. se ha de restar $10b$. la resta serà $-18b$. y assi de los demàs: la razon es clara, porque quitar el mas del menos, es aumentar el menos; y quitar el menos del mas, es aumentar el mas.

Caso 4. Quando los caracteres son diferentes al que se ha de restar del otro, se le variarà el signo que tacita, ò expressamente lleva, y se escrivirà en su seguida: como, si de a se ha de restar b, se escrivirà $a-b$: asimismo, si de a, se ha de quitar $+b$, se escrivirà $a-b$; pero si de a se ha de restar $-b$, se escrivirà $a+b$, y este es el residuo: la razon es, porque quitar el menos, ò la carencia de vna cosa, es añadir la misma cosa; assi como el quitar vna cosa es poner, ò añadir su carencia.

PROP. III. Problema.

Multiplicar caracteres incomplexos.

DOs reglas se han de observar en la multiplicacion de los caracteres, vna en orden à los signos, y otra en orden à los caracteres.

Regla 1. en quanto à los signos. En la multiplicacion, si los signos son semejantes, el producto tendrà el signo $+$; y si los signos fueren desemejantes, tendrà el producto el signo

no — con que los ſignos ſemejantes dàn +, y los deſemejantes dàn —.

Exemplos. Si ſe ha de multiplicar — 3 por + 5. ò + 5. por — 3. ò — 5. por + 3. ò + 3. por — 5. ſe multiplicarà en todos eſtos caſos 5. por 3. y al producto 15. ſe le darà el ſigno — por ſer deſemejantes los ſignos del multiplicando, y multiplicador; pero ſi tanto el ſigno del vno, como el del otro fueren ſemejantes, ſe le darà ſiempre el ſigno + al producto; como, ſi ſe multiplica — 3. por — 5. ſerà el producto 15. como tambien multiplicando + 3. por + 5. la razon es, porque multiplicar es vn ſumar abreviado; pero ſumando tres partidas de — 5. es la ſuma — 15. luego multiplicando — 5. por 3. ha de ſer tambien el producto — 15. la razon de eſto, y de lo dicho haſta aora, ſe verà con mayor claridad en las obſervaciones pueſtas al fin del Capitulo 2.

— 5.
— 5.
— 5.
——
— 15.

Regla 2. en quanto à los caracteres. 1. Si los caracteres no llevaren antes de sì numero alguno, ſe eſcrivirà el vno al lado de el otro, y eſſo ſerà el producto de entrambos: como ſi ſe ha de multiplicar *a* por *b*, ſerà el producto *ab*; ſi ſe ha de multiplicar *a* por *a*, ſerà el producto *aa*, y ſi *aa* ſe ha de multiplicar por *a*, ſerà el producto *aaa*; pero en eſtos caſos, para abreviar, en lugar de *aa*, ſe eſcrive a2. y en lugar de *aaa*, ſe eſcrive a3. que ſon los exponentes de las poteſtades, como en otras partes he dicho.

2. De lo dicho ſe colige, que quando las letras del multiplicando, y multiplicante ſon las miſmas, el producto lleva la miſma letra, pero ſu exponente ha de ſer la ſuma de los exponentes del multiplicante, y multiplicando: como, multiplicando *a* por *a*, es el producto a2. multiplicando a2. por *a*, es el producto a3. multiplicando a3. por a2. es el producto a5. multiplicando a2. por b2. es el producto a2b2. por ſer las letras diferentes; y multiplicando a2b2. por b3. es el producto a2b5. y aſsi de los demàs.

3. Si los caracteres llevaren numero, ſe multiplicarà el numero del caracter, multiplicando por el numero del mul-

multiplicador, y al producto ſe le pondràn los caracteres de entrambos, ſi fueren diferentes, ò el miſmo, ſi fueren ſemejantes, dandole por exponente la ſuma de los exponentes del multiplicador, y multiplicado, en la forma dicha, como ſe vè en los exemplos ſiguientes.

Exemplo 1.	*Exemplo* 2.	*Exemplo* 3.	*Exemplo* 4.	*Exemplo* 5.
8a	2	2a	+ 6ab	12a3b4.
2	8a	3a	— 2a	2a2b2.
16a.	16a.	6a2.	— 12a2b.	24a5b6.

En el exemplo 1. y 2. multiplicando 8a. por 2. ò al contrario, es el producto 16a. En el 3. multiplicando 2a. por 3a. es el producto 6aa. ò abreviado 6a2. En el 4. multiplicando 6ab. por 2a. es el producto 12a2b. pero por ſer los ſignos contrarios ſe le dà al producto el ſigno — ſegun la regla 1. y es — 12a2b. y aſsi de los demas.

PROP. IV. Problema.

Partir caracteres incomplexos.

EN la particion de los caracteres, tambien ſe han de obſervar dos reglas, la vna es tocante à los ſignos, y la otra à los caracteres.

Regla 1. en quanto à los ſignos. Eſta es la miſma que dixe en la Propoſicion paſſada, que los ſignos ſemejantes ſiempre dàn +, y los deſemejantes —: como, ſi — 15. ſe parte por — 5. el quociente ſerà + 3. por ſer los ſignos del dividendo, y diviſor ſemejantes; aſsimiſmo, ſi + 15. ſe parte por + 5. es el quociente + 3. pero ſi ſe parte — 15. por + 5. ò tambien + 15. — por 5. qualquiera de eſtas particiones darà el quociente — 3. por ſer los ſignos del dividendo, y diviſor deſemejantes: la razon es, porque como dixe en la regla 1. de la Propoſ. paſſada, multiplicando + 5. por — 3. es el producto — 15. luego, como la particion deshaga lo que hizo la multiplicacion, partiendo — 15. por + 5. ſerà el quociente — 3.

Re-

Regla 2. en quanto à los caracteres. Comprehende los casos ſiguientes.

Caſo 1. Quando el partidor es numero ſolo ſin caracter, y el dividendo tiene mayor numero, ſe partirà eſte por aquel, y al producto ſe le darà el miſmo caracter, como ſe ve en el exemplo 1.

Caſo 2. Quando las letras del diviſor, y dividendo ſon ſemejantes, y el diviſor tuviere menor numero, y exponente, ſe partiràn llanamente los numeros, el del dividendo por el del diviſor, y al quociente ſe le darà la miſma letra; y reſtando el exponente del diviſor, del exponente del dividendo, ſe le darà al quociente el reſiduo por exponente; y ſi los exponentes del diviſor, y dividendo fueren iguales, ſe quitarà la letra, y quedarà ſolo el numero por quociente: Todo ſe vè en los exemplos ſiguientes.

18a2.	12b4.	8b2.	6d3.	+ 10m3.
6	6b3.	8b2.	2d1.	--- 2m1.
3a2.	2b1.	1.	3d2.	--- 5m2.

En el exemplo 1. partiendo 18a2. por 6. ſale el quociente 3a2. En el 2. partiendo 12b4. por 6b3. es el quociente 2b1. porque partiendo 12. por 6. es el quociente 2. y reſtando el exponente 3. del exponente 4. es b1. el caracter del quociente. En el exemplo 3. partiendo 8. por 8. es el quociente 1. y por ſer iguales los exponentes ſe omite la letra, y queda ſolo 1. por quociente. En el vltimo, partiendo 10m3. por---2m1. es el quociente---5m2. ſegun la regla 1.

Caſo 3. Quando el numero del diviſor fuere mayor que el del dividendo; ò el diviſor, y dividendo tuvieſſen diferente letra, ò el exponente del diviſor fuere mayor que el del dividendo, ſe harà quebrado, poniendo el dividendo ſobre la raya, y el diviſor debaxo de ella, como ſe ve en los exemplos ſiguientes.

5b3.

	5b3.	6b4.	12 m3.	10 z2.
	8b3.	8b3.	4 p3.	5 z3.
quocientes.	$\frac{5b3.}{8b3.}$	$\frac{6b4.}{8b3.}$	$\frac{12 m3.}{4. p3.}$	$\frac{10 z2.}{5 z3.}$

En el primer exemplo, por ser el numero de el partidor mayor, que el del dividendo, se forma el quebrado que alli se vè; pero por ser el exponente, y letra vnos mismos en el numerador, y denominador, se podràn borrar los caracteres, y serà el quociente 5. ochavos. En el segundo exemplo, por la misma razon se haze quebrado del dividendo, y divisor; y es $\frac{6b\,4.}{8b\,3.}$ pero por ser vna misma la letra de entrambos, y poderse restar el exponente de el divisor del exponente del dividendo, se podrà expressar el quociente en este quebrado $\frac{6}{8}$ b1. En el tercero, y quarto exemplo se forma el quebrado, porque aunque el numero del dividendo es mayor que el del divisor; pero en el tercero son las letras diferentes; y en el quarto los exponentes.

Caso 4. Quando, además de lo dicho en el precedente caso, concurrieren diferentes signos, el quebrado que es quociente, ha de llevar el signo----; el qual se podrà expressar en qualquiera forma de las siguientes, que todas son de vn mismo valor: supongamos se ha de partir----1. por + 4. el quociente serà qualquiera de los quebrados siguientes, que son vna misma cosa.

$$\frac{----1}{+4} \qquad \frac{+1}{----4} \qquad \frac{1}{----4}$$

Tambien, aviendose de partir----3. por----5. el quociente serà qualquiera de los quebrados siguientes, que son de vn mismo valor.

----3



Adviertо aſsimiſmo, que ſi por exemplo, ſe ha de partir $7x$. por 8. el quebrado que es quociente, puede tener las formas ſiguientes; ſin variarſe por eſſo ſu valor.

$$\frac{7x}{8} \qquad \frac{7}{8}x$$

Pero ſeria conſiderable error, ſi ſe eſcriviеſſe $\frac{7}{8x}$ en lugar de los ſobredichos.

Las ſobredichas reglas ſe guardan tambien, partiendo vn producto de caracteres por otro caracter, ò por otro producto, guardando la regla de los exponentes, ſegun pidiere el caſo, como en eſtos exemplos.

	6z2a3.	10a1b3.	12a3b2.	ab.
	4x2b2.	5b1.	6a2b1.	b.
quocientes.	$\frac{6z2a3.}{4x2b2.}$	2a1b2.	2a1b1.	a.

En el primer exemplo ſe forma el quebrado, ſin mudar nada, por no aver letra ſemejante. En el ſegundo, partiendo 10. por 5. ſale el quociente 2. y reſtando el exponente de b1. del de b3. queda b2. y es el quociente 2a1b2 de la miſma ſuerte ſe obra en el tercero. En el quarto, partiendo *ab* por *b*, es el quociente *a*: la razon es clara, porque el producto *ab*, ſale de la multiplicacion de *a* por *b*: luego ſi el producto ſe parte por qualquiera de los dos, ha de ſalir por quociente el otro; aſsimiſmo, ſi ſe parte 4b por *b*, ſale el quociente 4. y ſi ſe parte por 4. ſale el quociente *b*.

CAPITULO II.

DE LA LOGISTICA DE LOS CARACTERES complexos.

EN todas las operaciones del ſumar, reſtar, multiplicar, y partir caracteres complexos, ſe deben obſervar las miſmas reglas, que en los incomplexos, con que aviendo comprehendido lo que ſe dixo en aquellos, no ſe hallarà dificultad alguna en exercitar las ſobredichas operaciones en ellos, pero para mayor facilidad explicarè ſu practica en las Propoſiciones ſiguientes.

PROP. V. Problema.

Sumar caracteres complexos.

EN el ſumar caracteres complexos, ò compueſtos pueden ſuceder tres caſos, porque, ò tanto los caracteres como los ſignos ſon ſemejantes, ò los caracteres ſon ſemejantes, y los ſignos diferentes; ò tanto los caracteres, como los ſignos ſon diferentes.

Caſo 1. Quando, tanto los caracteres, como los ſignos, ſon ſemejantes, ſe ſumaran los numeros, y en la ſuma ſe pondran los miſmos caracteres, y ſignos, como en eſte exemplo.

3 a2 + 5 b
2 a2 + 3 b
―――――
5 a2 + 8 b

Caſo 2. Quando los caracteres ſon ſemejantes, pero los ſignos ſon diferentes, en lugar de ſumar, ſe ha de reſtar el numero menor del mayor; y a la reſta ſe ha de poner el ſigno del mayor, y eſſa ſera la ſuma, como en los exemplos ſiguientes.

7 a3 --- 6 a2	14 ba --- 4 b --- 10	7 m + 4 a
4 a3 + 4 a2	8 ba + 8 b + 12	2 m --- 6 a
11 a3 --- 2 a2	22 ba + 4 b + 2	9 m --- 2 a

En

En los tres exemplos, los primeros numeros, y caracteres se suman llanamente, porque en todos se entiende el mismo signo +, en los demas caracteres se guarda la regla dada: en el primer exemplo 7. y 4. son 11a3. despues por ser los signos diferentes, se resta, diziendo, si de 6. se quitan 4. sobran 2. y se pone el signo —, porque 6. numero mayor le tiene; y es la suma 11a3 — 2a2. En el segundo exemplo, digo 14. y 8. hazen 22ba. despues prosigo restando 4. de 8. quedan 4. y porque 8. numero mayor lleva +, pongo en la suma + 4b. passo adelante, y restando 10. de 12. sobran + 2. por llevar 12. numero mayor +, y assi en los demàs.

Caso 3. Quando las letras, ò exponentes fueren diferentes, se escrivirán las partidas que se han de sumar vna al lado de la otra en vna linea con sus proprios signos, y caracteres; como, para sumar a2 + 3b4. con a3 — 2z. serà la suma a2 + 3b4 + a3 — 2z.

Si en las cantidades que se han de sumar huviere algunos caracteres semejantes, y otros desemejantes, se observaràn los preceptos de todos los casos propuestos, como en el exemplo siguiente, donde se ve, que 12b2. con 7b2. se suma segun la regla del caso primero; + 7b. con — 10b se suma como en el caso segundo, y el — 2a, con + 6z. se suma como en el caso tercero.

12 b2	+ 7 b	— 2a	
7 b2	— 10 b		+ 6z
19 b2	— 3 b	— 2a	+ 6z

PROP. VI. Problema.

Restar caracteres complexos.

EN la resta de los caracteres complexos pueden ocurrir los mismos quatro casos, que en los incomplexos, segun lo que dixe en la Prop. 2.

Caso 1. Quando los caracteres, y signos son semejantes, y el numero que se ha de restar es menor, se resta llanamente, y al residuo se le pone el mismo signo, y caracter, como en este exemplo.

6a	+ 4b2	— 3
2a	+ 2b2	— 2
4a	+ 2b2	— 1

 Caso

Caso 2. Quando asi los caracteres, como los signos son semejantes, pero el numero que se ha de restar fuere mayor, se restarà el menor del mayor, aunque el menor estè arriba; y al residuo se le darà el signo contrario, como en estos exemplos.

6a + 4b	4 — 6az	6z — 6x
2a + 9b	3 — 12az	9z — 8x
4a + 5b	1b + 6az	— 3z + 2x

En el exemplo primero restando 2a. de 6a. quedan 4a. y porque 9b. no se pueden restar de 4b. se resta al revès 4b. de 9b. y quedan 5b. con el signo opuesto; y es la resta 4a — 5b. Lo mismo es en el exemplo segundo. En el tercero restando 6z. de 9z. quedan 3z. que se ponen con el signo —, por llevar los primeros el signo + : tambien restando 6x. de 8x. quedan + 2x. y es la resta — 3z + 2x. la razon es la misma que la del caso 2. Prop. 2.

Caso 3. Quando, siendo los caracteres semejantes, fueren los signos diferentes, los terminos que se siguen a los signos, en lugar de restarse se suman, y al residuo se le da el signo del superior, como en estos exemplos.

7b + 8a	6a — 3zz y + 4	4x + 12a
5b — 6a	2a + 8zz y — 10	9x — 8a
2b + 14a	4a — 11zz y + 14	— 5x + 20a

En el exemplo primero, restando 5. de 7. quedan 2b. y sumando 8. con 6. por ser los signos contrarios, seran 14. y porque el caracter de arriba lleva + serà la resta 2b + 14a. lo mismo es en el segundo exemplo; pero en el tercero, restando 4. de 9. es la resta — 5. segun el caso segundo; sumando despues 12. con 8. seran + 20a. y toda la resta es — 5x + 20a. la razon consta de lo dicho en la Prop. 2. caso 2.

Caso 3. Quando los caracteres fueren diferentes, se escriviran los caracteres de la parte superior con sus proprios nu-

numeros, y ſignos, y à ſu lado en vna miſma linea, ſe eſcriviran los que ſe han de reſtar; pero con los ſignos contrarios à los que tenian antes; y ſi acaſo concurrieren algunos caracteres ſemejantes, ſe obſervaràn en ellos las reglas de los caſos precedentes, como en eſtos exemplos.

$12b2 - 6z + 10$	$10a + 6a2$
$4b2 + 2a - x$	$6x - 5z$
$8b2 - 6z + 10 - 2a + x$	$10a + 6a2 - 6x + 5z$

En el exemplo primero, por ſer los primeros caracteres ſemejantes, ſe reſtan como en el caſo 1. y porque los demàs ſon deſemejantes, ſe ponen los de arriba en el reſiduo con ſus proprios ſignos; y en ſu ſeguida los del reſtador con los ſignos variados en ſus opueſtos. En el exemplo ſegundo, por ſer todos los caracteres diferentes, ſe eſcrive la partida de arriba con ſus miſmos ſignos, y à ſu lado la de abaxo con los ſignos contrarios.

PROP. VII. Problema.

Multiplicar caracteres complexos.

Los caracteres complexos ſe multiplican con el miſmo orden que ſe multiplican los numeros, ſegun la Arithmetica vulgar, pero obſervando con todo cuidado las reglas dadas en la Prop. 3. para multiplicar los caracteres incomplexos, como ſe vè en los exemplos ſiguientes.

$6a2 + 3a$	$3b2 + 2b3 - 6$
$2a2 + 2a$	$3b - 2$
$+ 12a3 + 6a2$	$- 6b2 - 4b3 + 12$
$12a4 + 6a3$	$9b3 + 6b4 - 18b$
$12a4 + 18a3 + 6a2$	$9b3 + 6b4 - 18b - 6b2 - 4b3 + 12$

En el exemplo primero, començando por 2a. digo, dos ve-

vezes 3. ſon 6. y ſumando los exponentes 1. y 1. (que ſe entienden quando no ay otro) es la ſuma 2. con que ſeràn 6a2. y por ſer ſemejantes los ſignos del multiplicado, y multiplicador, es el producto + 6a2. multiplico deſpues de la propria ſuerte el 6a2. de arriba por el miſmo 2a. y es el producto + 12a3. y queda concluìdo el producto primero: multiplico aora la miſma cantidad de arriba por 2a2. y digo, 2. vezes 3. ſon 6. y ſumando los exponentes es el producto + 6a3. que ſe eſcrive debaxo el caracter multiplicador: multiplicando vltimamente 6a2. por 2a2. ſalen 12a4. y queda hecho el producto ſegundo, y ſumando los dos productos parciales, ſale el total, como ſe vè en el exemplo.

En el exemplo ſegundo multiplico — 6. por — 2. y es el producto + 12. deſpues + 2b3. por — 2. produce — 4b3. como tambien 3b2. por — 2. dà — 6b2. y queda concluìdo el producto primero: multiplicando — 6. por 3b1. ſalen — 18b. tambien + 2b3. por 3b. dà + 6b4. aſsimiſmo 3b2. por 3b. dà 9b3. y ſe tiene el producto ſegundo, que ſumado con el primero, queda concluida la operacion.

Si concurren diferentes letras, ſe guarda el miſmo eſtilo que en la multiplicacion de los caracteres incomplexos, como en eſte exemplo.

Multiplicando — 2y. por — b. ſalen + 2yb. tambien multiplicando 3a2b2. por — b. ſalen — 3a2b3. con que ſe tiene el primer producto: multiplicando

3a2b2 — 2y
1z — b
— 3a2b3 + 2yb
+ 3a2b2z — 2yz
3a2b2z — 2yz — 3a2b3 + 2yb.

— 2y. por 1z. ſale — 2yz. como tambien multiplicando 3a2b2. por 1z. ſale + 3a2b2z. con que ſe tiene el producto ſegundo, que ſumado con el primero, haze el producto total.

PROP.

PROP. VIII. Problema.

Partir caracteres complexos.

EN la particion de caracteres complexos pueden ocurrir dos casos principales: el primero, quando se han de partir por vn caracter simple, ò incomplexo; el segundo, quando se han de partir por caracteres complexos, y en cada vno de estos pueden ocurrir los mismos casos que en la particion de los incomplexos; y en todos se observaràn las mismas reglas de la Prop.4.

Caso 1. Quando el partidor es caracter incomplexo, se iràn partiendo por dicho partidor cada vno de los caracteres del dividendo, como si estuviere solo, observando las mismas leyes, y casos de la Prop.4. como se vè en los exemplos siguientes.

$$\frac{18a3 + 4a2}{2a} \qquad \frac{6b2 --- 9b}{3b}$$

$$9a2 + 2a \qquad 2b --- 3$$

En el primero, partiendo 18. por 2. sale 9. y restando los exponentes es 9a2. tambien partiendo 4. por 2. sale 2. y restando los exponentes es 2a. y por ser los signos semejantes, es el quociente 9a2 + 2a. En el segundo exemplo, partiendo 6b2. por 3b. es el quociente 2b. y partiendo 9b. por 3b. es el quociente 3. por ser el caracter que se parte semejante en todo al del partidor; y por llevar signos diferentes, se le dà al quociente el signo---, y es todo 2b---3.

Quando el numero, ò el exponente del partidor fuere mayor, ò algunas de sus letras, fueren diferentes, se harà quebrado, como en el primero de los exemplos siguientes; y lo mismo se podrà hazer quando el partidor consta de muchos terminos, como en el exemplo segundo; pero en muchas ocasiones, serà menester tener comprehendida la regla del caso siguiente.

$$\frac{10x2 + 6a}{x} \qquad \frac{8a2b + 9b2}{7a3 + 10b}$$

 Par-

Partiendo 10 x2 + 6a. por 2. es el quociente el quebrado primero; y partiendo 8a2b + 9b2. por 7a3 + 10b. sale el quebrado segundo.

Caso 2. Quando, assi la cantidad que se ha de partir, como el partidor, constan de muchos terminos, se procederà en la particion con la misma orden, y methodo, con poca diferencia, que en la particion de vn numero por otro, segun las reglas que di en la Arithmetica Inferior; pero observando las mismas reglas que en el caso primero. Voy explicando la practica de la particion en el exemplo siguiente.

Exemplo 1.

Dividendo.	4a5 + 4a4 --- 19a3 --- 4a2 + 14a --- 8
Partidor.	2a2 --- 1a --- 4
Quociente 1.	2a3
Producto 1.	4a5 --- 2a4 --- 8a3
Residuo 1.	+ 6a4 --- 11a3 --- 4a2 + 14a --- 8
Partidor.	2a2 --- 1a --- 4
Quociente 2.	+ 3a2
Producto 2.	+ 6a4 --- 3a3 --- 12a2
Residuo 2.	--- 8a3 + 8a2 + 14a --- 8
Partidor.	2a2 --- 1a --- 4
Quociente 3.	--- 4a
Producto 3.	--- 8a3 + 4a2 + 16a
Residuo 3.	+ 4a2 --- 2a --- 8
Partidor.	+ 2a2 --- 1a --- 4
Quociente 4.	+ 2
Producto 4.	+ 4a2 --- 2a --- 8
Residuo 4.	0 0 0

Operacion 1. Aviendo escrito el partidor debaxo del dividendo, como se ve, empiezo partiendo 4a5 por 2a2. y es el quociente 2a3. que escrivo debaxo, en la linea del quociente 1. multiplico todo el partidor por este quociente 1. y sale el producto 1. resto el producto 1. de la cantidad, y queda el residuo primero. Entendida esta primera operacion, quedaràn todas entendidas, porque en todas las que faltan hasta concluir la particion, se haze lo mismo.

Ope-

Operacion 2. Escrito otra vez el partidor, debaxo del residuo primero, parto su primer termino, que es + 6a4 por 2a2. y sale 3a2. que escrivo en la linea del quociente segundo; multiplico el partidor por este quociente, y sale el producto segundo, que restado del residuo 1. queda el residuo 2.

Operacion 3. Escrivo otra vez el partidor debaxo del residuo 2. y partiendo --- 8a3. por + 2a2. es el quociente --- 4a. que escrivo en la linea del quociente 3. y multiplicando el partidor por el quociente 3. sale el producto 3. y restando este del residuo segundo, sale el residuo 3.

Operacion 4. Buelvo à escrivir el partidor debaxo el residuo tercero; y partiendo + 4a2. por + 2a2. es el quociente + 2. que escrivo en el quociente 4. multiplico el partidor por el quociente quarto, y sale el producto quarto, que restado del residuo tercero, queda el residuo quarto todos zeros: junto aora los quocientes hallados, con sus signos, y es todo el quociente 2a3 + 3a2 --- 4a + 2. la prueba es, que multiplicando este quociente por el partidor, sale la cantidad que se partiò.

Exemplo 2.

Cantidad.	12x3 --- 8x2	+ 3xb --- 2b
Partidor.	3x --- 2	
Quociente 1.	4x2	
Producto 1.	12x3 --- 8x2	
Residuo 1.		+ 3xb --- 2b
Partidor.		+ 3x --- 2
Quociente 2.		+ b
Producto 2.		+ 3xb --- 2b
Residuo 2.		0 0

Partiendo 12x3. por 3x. es el quociente primero 4x2. multiplicando el partidor por este quociente, sale el producto primero, que restado del dividendo, queda el residuo primero.

Escrito el partidor debaxo el residuo primero, se parte 3xb. por 3x. y es el quociente + b. multiplicando el partidor

partidor por eſte quociente , ſale el producto ſegundo 3xb---2b. qne reſtado del reſiduo primero , queda el reſiduo ſegundo todo zeros ; y juntando los dos quocientes con ſus ſignos , es el quociente total 4x2 + b. y queda hecha la particion.

Con eſte miſmo eſtilo ſe partiràn las cantidades literales compueſtas ; pero ſe ha de tener preſente , que partiendo ab. por + b. es el quociente + a. como tambien partiendo ab. por + a es el quociente + b. aſsimiſmo , partiendo ---ab. por---a. es el quociente + b. y partiendo--- ab. por---b. es tambien el quociente + a. pero partiendo + ab. por--- b. es el quociente--- a. como + ab. por ---a. dà---b, aſsimiſmo , ſi ſe parte---ab. por + a. es el quociente--- b. tambien partiendo abx. por x. es el quociente ab. y ſi abx. ſe parte por bx., es el quociente a. Con eſto ſerà facil partir las magnitudes literales complexas, como ſe vè en los exemplos ſiguientes.

Exemplo 3.

Se ha de partir ac + ad. por c + d.

Operacion. Partiendo ac. por c. dà el quociente a. multiplicando el partidor c + d. por a. es el producto ac + ad. que reſtado del dividendo , es el reſiduo zeros : Digo , pues, que partiendo ac + ad. por c + d. es el quociente a.

Dividendo.	ac + ad
Partidor.	c + d
Quociente.	a
Producto.	ac + ad
Reſiduo.	o o

Exemplo 4.

Se ha de partir ac + bc + ad + bd. por c + d. Parto ac por c. y es el quociente primero + a. multiplico el partidor por + a. y ſale el producto primero ac + ad. que reſtado de la cantidad, dà el reſiduo primero bc + bd.

Dividendo.	ac	+ bc	+ ad	+ bd	
Partidor.	c + d				
Quociente 1.	+ a				
Producto 1.	ac		+ ad		
Reſiduo 1.		bc		+	bd
Partidor.		c + d			
Quociente 2.		+ b			
Producto 2.		bc		+	bd
Reſiduo 2.		o			o

Buel-

Buelvo à eſcrivir el partidor debaxo el reſiduo primero, y parto bc. por c. y es el quociente ſegundo + b. que multiplicando al partidor, es el producto bc + bd, que reſtado de el reſiduo primero, dà el reſiduo ſegundo zeros: Es, pues, el quociente total a + b. que ſon los dos quocientes parciales juntos.

Exemplo 5.

Para partir aa — bb. por a — b. ſe parte aa. por a. y es el quociente primero + a. que multiplicando al partidor, dà el producto primero aa — ab. que reſtado de la cantidad, dà el reſiduo primero ab — bb. partiendo aora ab. por a. es el quociente ſegundo + b. que multiplicando al partidor, dà el producto ſegundo ab — bb. que reſtado del reſiduo primero, dà el reſiduo ſegundo todo zeros, y juntando los dos quocientes parciales, es el quociente total a + b. la prueba es, que multiplicando a + b. por a — b. es el producto aa — bb.

Dividendo.	aa — bb	
Partidor.	a — b	
Quociente 1.	+ a	
Producto 1.	aa — ab	
Reſiduo 1.	ab — bb	
Partidor.	a — b	
Quociente 2.	+ b	
Producto 2.	ab — bb	
Reſiduo 2.	o	o

Exemplo 6.

Se ha de partir a3 — b3. por a — b.

Operacion. Parto a3. por a. y es el quociente primero + aa. que multiplicando al partidor, dà el producto primero a3 — aab. que reſtado del dividendo, ſale el reſiduo primero aab — b3. parto aora aab. por a. y es el quociente ſegundo + ab. que multiplicando al partidor, dà el producto ſegundo aab — abb. que reſtado del reſiduo primero, dà el ſegundo abb — b3.

Dividendo.	a3 — b3	
Partidor.	a — b	
Quociente 1.	+ aa	
Producto 1.	a3 — aab	
Reſiduo 1.	aab — b3	
Partidor.	a — b	
Quociente 2.	+ ab	
Producto 2.	aab — abb	
Reſiduo 2.	abb — b3	
Partidor.	a — b	
Quociente 3.	+ bb	
Producto 3.	abb — b3	
Reſiduo 3.	o	o

Buelvo à escrivir el partidor, y parto abb. por a. y es el quociente tercero + bb. que multiplicando al partidor, dà el producto tercero abb — b^3. restando este del residuo segundo, queda el residuo tercero todo zeros; y recogiendo en vna linea los tres quocientes parciales hallados, es el quociente total aa + ab + bb. la prueba serà, que multiplicandole por a — b. saldrà el dividendo a^3 — b^3.

Para que mas facilmente retenga la memoria las reglas de los signos en la logistica de los caracteres, las reduzgo à estas breves palabras.

En la suma, los signos semejantes dàn semejantes; los diferentes varìan la operacion; y el mayor numero pone su signo.

En la resta, los signos semejantes dàn semejantes, si no es quando se resta al revès; los diferentes varìan la operacion, y la cantidad superior pone su signo.

En la multiplicacion, y particion, los signos semejantes dàn +, los desemejantes dàn —.

OBSERVACIONES.

ALgunas de las reglas que se han dado, parecen à los principiantes, paradoxas; y aunque el acierto que se experimenta en su practica, acredita bastantemente su verdad, juzgo ser conveniente antes de passar adelante hazer de ella mayor ostension, estableciendola con algunas razones.

§. I.

De las cantidades menores que nada.

DIxe al principio, que las cantidades negativas son menores que nada, lo que parece paradoxa, y seria destruir la idèa de la quantidad si se entendiesse con todo rigor: lo que los Algebricos quieren significar por cantidades menores que nada, se dà bastantemente à entender con los exemplos siguientes.

1. Supongase, que vn hombre no tiene bienes algunos, y que debe 100. escudos; y vn otro hombre no tiene tampoco bienes algunos, pero no debe nada; es cierto tiene el primero peor fortuna que el segundo; pero este tiene nada: luego el primero tiene menos que nada. Tambien, si al que no tiene bien alguno, y debe 1000. escudos, le dàn 1000. escudos, con que paga la deuda, aumenta sus bienes; pero sus bienes aun despues de este aumento son nada: luego

antes

antes del aumento, sus bienes eran menos que nada.

2. Supongase, que ay 5. leguas desde C hasta A; y que de C à B, ay 3. leguas: Supongase tambien, que hallandose vn hombre en C, quiere ir àzia A: Si este hombre camina hasta A, es verdadero dezir, ha avançado 5. leguas, y assi, que su avance es mas que nada: Si dicho hombre fuere detenido en C, su avance serìa nada; pero si viniesse à B, diriamos en lenguaje ordinario, que ha buelto atràs; y segun estilo de la Algebra, se dize aver avançado menos que nada; y que su avance es — 3. leguas, y que estas — 3. leguas es vna cantidad menor que nada. Estas cantidades negativas son de gran consequencia en esta Facultad, como se verà en el discurso de este tratado.

B. C. A.

§. II.

Del sumar, y restar.

SUele causar no poca dificultad à muchos el concebir, porque el signo — se muda en + en la substraccion de los numeros negativos, quando se restan de los positivos; y porque en estos casos sale el residuo mayor que la cantidad de quien se restò; como, si de 14. se restan — 2. es el residuo, segun la regla, + 16. pero la razon es evidente; porque quitar de 14. el — 2. es quitar la carencia de 2. que es lo mismo que añadir 2. tambien si de 14. quitamos + 2. queda el 14. disminuinuido en 2. si no se le quita nada, se queda 14. luego si se le quita — 2. queda aumentado en 2. A mas de esto, por medio del restar no se busca otra cosa, que la diferencia que ay entre dos cantidades; y es claro, que la diferencia que ay de 14. al — 2. es 16. porque de 14. à nada vàn 14. de nada al — 2. vàn 2. luego de 14. al — 2. vàn 16. de aqui se colige la razon, porque sumando — 2. con 16. es la suma 14. porque lo mismo es añadir menos 2. que quitar 2. como dixe en la Prop. 1.

§. III.

Del multiplicar.

LA regla de los signos para la multiplicacion, incluye tres partes: la primera es, que multiplicar + por + dà +, como multiplicar + 4. por + 3. dà + 12. y en esta nadie tropieza: la segunda es, que multiplicando + 4. por — 3. ò tambien

+ 3.

+ 3. por — 4. es el producto — 12. y la tercera, que multiplicando — 4. por — 3. sea el producto + 12. y estas dos tienen alguna dificultad, que se allana con las razones siguientes.

1. La multiplicacion es vna suma abreviada, con que multiplicar — 3. por 4. es tomar quatro vezes el — 3. y hazer la suma, la qual no ay duda ser — 12. y por quanto lo mismo es multiplicar — 3. por 4. que 4. por — 3. es cierto que multiplicando 4. por — 3. ha de ser el producto — 12.

— 3
— 3
— 3
— 3
— 12

2. De lo dicho se colige tambien la razon, porque multiplicando — 4. por — 3. el producto ha de ser + 12. porque no es otra cosa essa multiplicacion, que sumar, ò tomar tantas vezes menos el — 4. quantas ay vnidades en el 3. y como quitar el menos es añadir, porque dos negaciones afirman, quitar vna vez el menos 4. es lo mismo que añadir 4. luego quitar tres vezes el — 4. es añadir tres vezes 4. que es lo mismo que añadir + 12. luego el producto de — 4. por — 3. es necessariamente + 12.

§. IV.

De la particion.

De lo que dixe en el §. antecedente de la multiplicacion, se infiere la razon, porque partiendo — por — el quociente ha de ser + como si se parte — 12. por — 4. es el quociente + 3. Lo primero, porque en toda particion el producto del quociente por el partidor es igual al dividendo; luego si se parte — 12. por — 4. el quociente ha de ser + 3. supuesto que — 4. multiplicado por + 3. dà el producto — 12. y assimismo, si + 12. se parte por — 3. serà el quociente — 4. porque — 4. multiplicado por — 3. haze 12. y lo mismo si — 12. se parte por + 3.

2. En toda particion no se busca otro que la razon del dividendo al divisor: esto es, quantas vezes se contiene el divisor en el dividendo: luego partiendo — 12. por — 3. se dize con toda verdad, que — 3. se incluye en — 12. quatro vezes, esto es + 4.

Esto mismo se confirma de esta manera: Para partir — 12. por — 3. se puede escrivir $\frac{-12}{-3}$ que son los terminos genera-

les

les con que se expressa el quociente, como saben los Arithmeticos; y como multiplicando los dos terminos de la fraccion por vn mismo numero, no se varìa el valor de la fraccion, si los terminos de la sobredicha se multiplican por —1. la fraccion que resulta $\frac{-12}{-3}$ *serà igual à* $\frac{+12}{+3}$ *y por consiguiente, dicho quociente serà 12. tercios; esto es, + 4. enteros.*

Ultimamente, partiendo + 12. por —3. es el quociente —4. porque si se multiplica tanto + 12. como —3. por —1. seràn los productos —12. por el dividendo, y + 3. por el divisor, con que lo mismo es partir + 12. por —3. que —12. por + 3. Partir, pues, —12. por 3. es partir el —12. en tres partes iguales, que cada vna es —4. luego en estos casos, en que se parte por —, ò — por +, el quociente lleva el signo —.

§. V.

De la Logistica de los quebrados de caracteres.

LA Logistica de los quebrados de caracteres, se executa con las mismas reglas, que en los quebrados de numeros vulgares, que se explicaron en el Trat. 2. lib. 2. pero se deben observar en el sumar, restar, multiplicar, y partir sus terminos, los preceptos de las Proposiciones antecedentes: la practica se facilitarà con los exemplos que dare en otro lugar mas conveniente.

CAPITULO III.

DE LA COMPOSICION, Y RESOLUCION de las potestades de los caracteres.

COMPONER vna potestad, es, dada la raiz, hallar la potestad: resolver vna potestad, es, dada la potestad, buscar su raiz: qualquiera potestad, ò raiz, se puede expressar, ò con caracteres, ò con numeros: en el Tratado antecedente se explicò la composicion, y resolucion de

de las que fe expreffan con numeros, aora la de las que fe forman con caracteres.

PROP. IX. Problema.

Hallar las poteftades de los caracteres incomplexos.

SI el caracter no lleva numero, fe hallaràn fus poteftades, añadiendo al caracter el exponente proprio de aquella poteftad, que fe pidiere: como fi el caracter es a. fu quadrado ferà a2. fu cubo a3. &c. la razon es, porque hallar las poteftades de vna cantidad, confifte en multiplicarla por si mifma, quantas vezes fuere menefter, fegun fuere la poteftad que fe pretende: luego el quadrado de a. es aa. ò a2. fu cubo aaa. ò a3. (3.) Efto mifmo fe haze, aunque fean dos, ò mas letras juntas; y afsi las poteftades de ab. fon a2b2. a3. b3. &c.

Si el caracter precede numero, fe hallaràn fus poteftades, multiplicando continuamente el dicho numero, y añadiendo à la letra los exponentes, como antes; como, para hallar las poteftades de 2a1. fe multiplicarà continuamente el 2. por si mifmo, y fe añadirà à la letra fu exponente 1. vna vez por cada multiplicacion; y afsi fera 4a2. fu quadrado, 8a3. fu cubo, &c. confta de lo dicho. Tambien las poteftades de 3ab. fon 9a2.b2. el quadrado; 27a3b3. el cubo: afsimifmo, fi fe bufca el quadrado de efte caracter a2. fe duplicarà fu exponente, y ferà a4. fu quadrado; fe triplicarà, y ferà a6. fu cubo: de la mifma fuerte el quadrado de 2b3. es 4b6. fu cubo es 8b9. y afsi de los demas.

PROP. X. Problema.

Hallar la raiz de los caracteres incomplexos.

1. SI los caracteres no llevan numero, partafe el exponente de la poteftad por el exponente de la raiz que fe bufca, y el quociente fera el exponente, que añadido a la mifma letra, fera la raiz: Si llevaren numero fe haze lo mifmo, pero fe ha de facar tambien la raiz del numero.

Exem-

Exemplos. Pidese la √2. de a^2. porque partiendo el vn exponente por el otro, sale 1. es la raiz a^1. ò a. porque la vnidad suele omitirse: assimismo, la √3. de b^3. es b. la √4. de c^4. es c. &c. tambien pidese la √2. de a^4. Parto 4. por 2. y es el quociente 2. Digo, pues, que a^2. es la raiz que se busca. Pidese la √3. de $8b^3$. Digo, la raiz cubica de 8. es 2. con que $2b^1$. es la raiz que se pide: Assimismo, la √4. de $81x^4$. es 3x. como tambien, la √3. de $27a^3b^3$. es 3ab. y assi de las demàs.

2. Si se pidiere tal raiz, que por su exponente no se pudiere partir el de la potestad sin resta, se pondra antes de la potestad el caracter radical √: como, si se pide la √2. de a^3. sera √2.a^3. la √3. de b^5. sera √3.b^5.

PROP. XI. Problema.

Hallar las potestades de los caracteres complexos.

MUltipliquese el caracter compuesto por sì mismo, y nacerà su quadrado: multipliquese por el mismo quadrado, y nacerà su cubo; y assi en las demas potestades: consta de lo dicho, y se vè en este exemplo.

Raiz. $a + b$.
Raiz. $a + b$.

$+ ab + b^2$.
$a^2 + ab$

Quadrado. $a^2 + 2ab + b^2$.
Raiz. $a + b$.

$a^2b + 2ab^2 + b^3$.
$a^3 + 2a^2b + ab^2$.

Cubo. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Raiz. $a + b$.

$a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$.
$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$

Quadr.-quadrado. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

De la miſma ſuerte ſe hallarán las poteſtades de $a - b$. guardando las leyes de la multiplicacion. Prop. 3.

COROLARIOS.

1. *De aqui ſe colige la compoſicion de las poteſtades, que demonſtrè en el Libro 1. de la Arithmetica Superior, porque el quadrado de la raiz, que conſta de dos partes, como* $a + b$. *ſe compone del quadrado de la parte primera* a^2. *mas, de dos planos, ò productos de la parte primera por la ſegunda* $2ab$. *mas, del quadrado de la parte ſegunda* b^2. *aſsimiſmo el cubo de la miſma raiz ſe compone del cubo* a^3. *de la primera parte : mas, de tres productos del quadrado de la primera por la ſegunda* $3a^2b$. *mas, de otros tres productos de la parte primera por el quadrado de la ſegunda* $3ab^2$. *y del cubo* b^3. *de la ſegunda, y aſsi de las demàs.*

2. *De lo dicho ſe colige tambien el modo de hallar las poteſtades de las magnitudes, cuyos caracteres llevan exponentes mayores que la vnidad, que es tambien, multiplicando dichas magnitudes por sì miſmas, obſervando la Prop. 7. como ſi ſe pidiere el quadrado de* $m^3 + m^2$. *hecha la multiplicacion por sì miſmo, ſe hallarà ſer* $m^6 + 2m^5 + m^4$. *y aſsi de las demàs poteſtades. Tambien ſi ſe pide el quadrado de* $y^3 + z^3$. *hecha la multiplicacion, ſe hallarà ſer* $y^6 + 2y^3z^3 + z^6$. &c.

PROP. XII. Problema.

Hallar la raiz de los caracteres complexos.

R*Egla.* Saqueſe la raiz del primer termino, como ſi eſtuvieſſe ſolo : (10.) ſaqueſe aſsimiſmo, la raiz del vltimo ; y las dos raizes juntas con el ſigno +, ò con el ſigno --, ſi ſe hallare eſte ſigno--- en la poteſtad compueſta, ſerà la raiz que ſe buſca, ò no tendrà raiz juſta: ſi ſe pide la $\sqrt{5}$. de $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2. + 10a^2b^3. + 5ab^4 + b^5$. ſera ſiguiendo la regla $a + b$. la raiz, pero es meneſter advertir lo ſiguiente.

1. Quando el primero, y vltimo termino no llevan numero, ſe ha de reconocer ſi los numeros de los terminos intermedios, ſon los miſmos que ſe ſeñalan en la Tabla ſyntentico-analytica para la raiz que ſe buſca, como en el exem-

exemplo propuesto, y siendo los mismos se concluirà, que la raiz hallada del modo explicado es la que se busca; pero si dichos numeros fueren diferentes, no tendra aquella composicion raiz justa.

2. Si el primero, y vltimo termino llevaren numero, se sacara la raiz de cada vno de dichos terminos por la regla de la Prop. 10. num. 2. y para examinar si la raiz sacada es la verdadera, se formarà de ella su potestad; [11.] y si los terminos intermedios salieren los mismos, y con los mismos numeros, la raiz hallada serà justa; pero si fueren diferentes, no tendrà raiz justa que se pueda expressar con numeros; y assi para dar su expression se cerrara dentro de vn parenthesis, y se le pondrà antes el signo radical $\surd$. con su exponente; como si se pide la raiz cubica de $x3 + 5xb + b3$. se expressarà assi, $\surd 3. [x3 + 5xb + b3.]$ Y esto mismo se hara en todas las potestades compuestas, cuyas raizes no se pudieren hallar por las reglas dadas: La razon de cerrar toda la composicion en vn parenthesis, es para denotar que la raiz que se quisiere significar, lo es de toda la composicion; con lo qual se quita toda equivocacion, porque sin parenthesis $\surd 3. x3. + 5xb + b3.$ significa la suma de la $\surd 3\ x3.$ con $5xb + b3.$ que es muy diferente. A las raizes expressadas con parenthesis del modo sobredicho llaman los Autores, *raizes universales*.

Generalmente todas las raizes de qualesquiera magnitudes que no se pudieren hallar por las reglas dadas, se expressaràn, escriviendo antes de ellas el signo radical $\surd$. con su proprio exponente; y assi la raiz cubica de 12. serà $\surd 3. 12.$ la raiz quadrada de $4b3$. serà $\surd 2. 4b3.$ La raiz cubica de 524. serà $\surd 3. 524.$ y assi de las demas.



CAPITULO IV.

DE LA INVENCION DE MEDIOS proporcionales en los caracteres.

DE lo que se demonstrò en el libro 1. desde la Prop. 7. se colige, que los planos, ò solidos que componen qualquiera potestad, tomados, y comparados singularmente, y de por sì, son continuos proporcionales: en lo qual consiste la practica de hallar qualesquiera medios geometricos, assi entre dos numeros, como se viò en las Proposiciones 1. y 2. del libro 3. como entre dos caracteres, como se verà en las siguientes.

PROP. XIII. Problema.

Entre dos potestades dadas hallar tantos medios proporcionales, quantos son los grados que ay hasta aquellas potestades.

Explicacion.

HAsta el quadrado ay solo vn grado, que es la raiz: hasta el cubo ay dos, que son raiz, y quadrado: hasta el quadrado-quadrado ay tres, que son raiz, quadrado, y cubo, &c. Pidese, pues, la regla para hallar entre dos quadrados vn medio proporcional: dos, entre dos cubos: tres, entre dos quadrado-quadrados, &c.

Regla general. Ponganse los caracteres de las potestades dadas a distancia competente, para que entre ellos se puedan poner tantos puntos, como medios se buscan: escrivanse en dichos puntos los grados descendentes, tanto de la vna, como de la otra potestad, y estos seràn los medios que se desean.

Exemplo 1. Entre los dos quadrados a2. y b2. se busca vn medio proporcional. Dispenganse los terminos, dexando entre ellos vn lugar vacio: en el qual pongo a1b1. y este producto es el medio proporcional.

a2 a1b1 b2

Exem-

Exemplo 2. Entre los dos cubos a3. y b3. ſe buſcan dos medios proporcionales. Pueſtos en diſtancia competente, pongo entre ellos dos puntos: y baxando de a3. pongo en el punto primero a2. y en el ſegundo a1. y baxando de b3. pongo en el primer punto b2. y en el ſegundo b1. y ſon los medios proporcionales a2b1. a1b2.

a3 a2b1 a1b2 b3

De eſte modo ſe hallaràn los medios entre las demàs poteſtades, mientras ſean preciſamente tantos, quantos ſon los grados que huviere haſta ellas. Conſta de la Prop. 7. y otras del libro 1.

PROP. XIV. Problema.

Hallar qualeſquiera medios proporcionales entre dos raizes dadas.

SUbanſe entrambas raizes haſta aquella poteſtad, à quien ſe ſube por tantos terminos, ò grados, quantos ſon los medios que ſe buſcan; como ſi ſe piden dos, ſe ſubiràn las raizes à cubos, porque al cubo ſe ſube por dos grados, que ſon, raiz, y quadrado: ſi ſe piden tres, ſe ſubiràn al quadrado-quadrado; porque haſta eſta poteſtad ay tres grados, que ſon, raiz, quadrado, y cubo; y aſsi en las demàs: hecho eſto, buſquenſe entre eſtas dos poteſtades los medios que ſe piden, [13.] y las raizes de todos los terminos ſeràn los proporcionales que ſe buſcan.

Exemplo 1. Buſcaſe vn medio proporcional entre a. y b. ſubidos à quadrados, ſon a2. y b2. el medio proporcional entre a2. y b2. es ab. ſon, pues, tres proporcionales a2. ab. b2. ſacando la raiz quadrada de todos, ſeràn proporcionales a. √2. ab. b. con que el medio proporcional entre a. y b. es √2. ab. conſta de la Prop. 15. del libro 1.

Exemplo 2. Pidenſe entre a. y b. dos medios proporcionales; conviertoles en cubos, por ſubirſe al cubo por dos grados, y ſeràn a3. y b3. hallo [13.] entre eſtas poteſtades dos medios, y ſeràn a3. a2b. ab2. b3. ſaco la raiz cubica de todos los terminos, y ſon a. √3 a2b. √3 ab2. b. con que los dos medios ſon √3 a2b. y √3 ab2. y aſsi de las demàs.

PROP. XV. Problema.

Hallar entre dos poteſtades mas, ò menos medios proporcionales, que ay grados haſta aquellas poteſtades.

HAgaſe cuenta que las poteſtades dadas ſon raizes, y multipliqueſe cada vna por si miſma tantas vezes, quantos fueren los medios que ſe pidieren. Hallenſe entre eſtas vltimas poteſtades (13.) tantos medios proporcionales, como ay grados deſde la raiz haſta ellas. Tomenſe de eſtos medios hallados tantos tan ſolamente como ſe piden; pero que ſean continuos proporcionales con los extremos. Saqueſe de eſtos la raiz de aquella poteſtad, à que ſe ſube por tantos grados, como medios ſe piden; y eſſos ſeràn los que ſe deſean.

Exemplo 1. Entre eſtos dos quadrados a2. b2. ſe piden dos medios proporcionales, ſiendo aſsi que al quadrado ſe ſube por vn ſolo grado, que es la raiz: pues porque ſe piden dos medios, multiplico dos vezes a2. por a2. y es el producto a6. Aſsimiſmo reduzgo b2. à b6. Hecho eſto, entre a6. y b6. que ſon la ſexta poteſtad, buſco cinco medios proporcionales (13.) por ſubirſe a dicha poteſtad por 5. grados, y ſon los ſiguientes:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
a6.	a5b.	a4b2.	a3b3.	a2b4.	ab5.	b6.

Supueſto que eſtos terminos ſon proporcionales, tambien lo ſeràn alternando: eſto es, el 1. al 3. como eſte al 5. y eſte al 7. Tomo, pues, eſtos quatro, y los eſcrivo à parte, como ſe vè.

a6. a4b2. a2b4. b6.

Eſtos ſon quatro proporcionales: Luego (15. lib. 1.) tambien lo ſeràn ſus raizes. Saquenſe, pues, ſus raizes cubicas, por averſe cubicado al principio, y ſeràn los quatro ſiguientes proporcionales.

a2. $\sqrt{}$ 3.a4b2. $\sqrt{}$ 3.a2b4. b2.

Con

Con que entre los terminos dados a2. y b2. ſe han hallado los dos medios que ſe pedian.

Exemplo 2. Entre eſtos dos cubos a3. y b3. ſe pide vn medio proporcional; ſiendo aſsi, que al cubo ſe ſube por dos grados. Hagaſe cuenta, que los cubos dados ſon raizes: y porque ſe pide vn medio, multipliqueſe cada vno vna vez por sì miſmo, y ſeràn a6. y b6. y haziendo la miſma operacion que antes, ſe hallaràn los 7. medios arriba pueſtos; y porque el quarto a3. b3. es medio proporcional entre los eſtremos a6. y b6. omitiendo los demàs, ſeràn tres proporcionales a6. a3b3. b6. cuyas raizes quadradas ſon los tres proporcionales a3. √ a3b3. b3. Con que el medio que ſe pide, es √ 2. a3b3. Eſta vltima operacion ſe harà con mayor brevedad, multiplicando entre si los cubos dados a3. y b3. y del producto a3b3. ſacando la raiz quadrada, que es √ 2. a3b3. Pero lo he explicado en la forma antes dicha, para que ſe haga mas cabal concepto de la generalidad de la regla, que entendida, hallarà qualquiera facilmente los atajos para muchas de las ſobredichas operaciones, quando las huviere meneſter, que ſerà pocas vezes.

CAPITULO V.

DE ALGUNAS OTRAS OPERACIONES hechas con caracteres, ò numeros.

PAra muchas de las reſoluciones Algebricas, ſon meneſter algunas operaciones à mas de las ſobredichas, que explico en las Propoſiciones ſiguientes: puedelas omitir el eſtudioſo, por no ſer meneſter haſta el libro 4. donde neceſſitarà de ellas, ſi quiere vſar de la methodo de reſolver las igualaciones que alli ſe enſeña. Veaſe el Corol. 4. de la Prop. 3. del Libro 4.

PROP. XVI. Problema.

Hallar methodicamente todos los productos alternativos de diferentes magnitudes.

P*Roductos alternativos de algunas magnitudes, son los que resultan de la multiplicacion de dichas magnitudes, tomandolas tanto de dos en dos, como de tres en tres, y de quatro en quatro, &c.* Los productos que resultan de los binarios de dichas magnitudes, se llaman, *planos alternativos, ù de segundo grado*: Los que resultan de los ternarios, son *solidos alternativos, ù de tercer grado*: Los de los quaternarios, se llaman *productos alternativos del quarto grado*; y assi de los demas. La regla para hallar los productos alternativos, es la siguiente: Escrivanse en vna linea las magnitudes dadas: multipliquese cada magnitud por cada vna de las otras que se le siguen, y saldràn los planos alternativos, ò binarios: Multipliquese cada plano de estos por cada vna de las magnitudes, que en la primera linea se siguen despues de la vltima de las que componen dicho plano, y resultaràn los solidos alternativos, ò ternarios. Assimismo se multiplicarà cada vno de estos solidos por cada magnitud de las que siguen à las tres que componen dicho solido, y se tendràn los quaternarios, ò productos alternativos del quarto grado: y assi en las demàs. Todo lo qual se funda en lo que dixe de las combinaciones en quanto à la substancia en la Arithmetica Inferior libro 6. Prop. 4. y se haze facil con los exemplos siguientes.

Exemplo 1. Pidense los productos alternativos de las cinco magnitudes a. b. c. d. e.

5. *Magnit. prop.* a. b. c. d. e
10. *Plan. altern.* ab.ac.ad.ae.bc.bd.be.cd.ce.de.
10. *Solid. altern.* abc.abd.abe.acd.ace.ade.bcd.bce.bde.cde.
5. *Prod. del* 4. *gr.* abcd.abce.abde.acde.bcde.
1. *Prod. del* 5. *gr.* abcde.

Si las magnitudes fueren todas iguales, como las cinco

co aaaaa, no ay mas que vn plano alternativo aa : vn ſolido alternativo aaa , ò $a3$. vn producto del quarto grado $a4$. y vn otro del quinto grado $a5$. como conſta del lugar citado, Prop. 1. Quando las magnitudes propueſtas fueren parte iguales , y parte deſiguales , como a.a.b.b.c. ſe obrarà como en el exemplo ſiguiente.

Exemplo 2. Pidenſe los productos alternativos de las magnitudes a.a.b.b.c. Multiplico la primera a. por la ſegunda , y reſulta el quadrado aa. Multiplico aora la a. por b. y reſulta ab. luego a. por c. y reſulta ac. tambien b. por b. y reſulta bb. y la b. por c. y reſulta bc. y ſiguiendo el orden que di en el lugar citado , Prop. 6. hallo los ſiguientes productos alternativos.

5. *Magnitudes propueſtas.*	a.	a.	b.	b.	c.
5. *Planos alternativos.*	aa.	ab.	ac.	bb.	bc.
5. *Solidos alternativos.*	aab.	aac.	abc.	abb.	bbc.
3. *Productos del 4. grado.*	aabb.	aabc.	abbc.		
1. *Producto del 5. grado.*	aabbc.				

Lo que ſe ha hecho con las letras , ſe haze tambien de la miſma ſuerte con los numeros ; pero para obrar con mayor ſeguridad , ſerà conveniente ſubſtituir letras en lugar de los numeros, repitiendo vna miſma letra en los numeros que fueren iguales. Y haziendo primero la operacion con las letras, ſe harà deſpues facilmente con los numeros.

PROP. XVII. Problema.

Hallar todos los diviſores ſimples, ò primos, iguales, ù deſiguales, que puedan dividir juſtamente qualquier numero dado.

PArtaſe el numero dado por 2. ſi fuere par ; y ſi el quociente fuere par , partaſe tambien por 2. y aſsi ſe continuarà haſta que el quociente ſea impar. Eſte quociente impar ſe partirà por 3. ſi es poſsible ; y el quociente otra vez por 3. haſta que venga vno , que no ſe pueda juſtamente partir por 3. Luego ſe intentaràn por ſu orden las particiones por 5. por 7. por 11. y por cada numero primo, como

como se vàn siguiendo, hasta que se halle vn quociente, que sea numero primo: con que quedarà resuelto el Problema.

Exemplo 1. Pidense los divisores simples, ò primos que justamente pueden partir el numero 462.

Operacion. Por ser dicho numero par, partase por 2. y el quociente impar 231. partase por 3. y el quociente 77. por 7. [por no poderse partir justamente por 3. ni por 5.] Y porque el quociente 11. es numero primo, queda concluida la operacion, y son los divisores simples 1.2.3.7.11.

Exemplo 2. Buscanse los divisores simples de 180.

Operacion. Partase 180. por 2. y el quociente 90. por ser par, otra vez por 2. y el quociente 45. por 3. y el quociente 15. otra vez por 3. y por ser el quociente 5. numero primo, no ay mas que hazer; y son los divisores simples 1.2.2. 3.3.5.

PROP. XVIII. Problema.

Hallar todos los divisores justos de qualquier numero dado.

HAllense primeramente (17) todos los divisores simples iguales, ù desiguales. Segundo, hallense (16) todos los productos alternativos diferentes, hechos de estos divisores simples; y queda resuelto el Problema.

Exemplo 1. Pidense todos los divisores del numero 462.

Operacion. Hallense primero todos los divisores simples de dicho numero, y seràn 2. 3. 7. 11. omitiendo la vnidad, porque no varia los productos. Hallense aora sus productos alternativos, [16] y tomando tambien la vnidad, se hallaràn todos los divisores justos de 462. los 16. siguientes: 1. 2. 3. 7. 11. 6. 14. 21. 42. 22. 33. 77. 66. 154. 231. 462.

Exemplo 2. Pidense los productos alternativos del numero 144. Hallense primero todos sus divisores simples, que son 2. 2. 2. 2. 3. 3. Y multiplicando el primer 2. por el segundo, y el producto 4. por el tercer 2. y el cubo 8. por el quarto 2. y el primer 2. y cada vno de los productos 4. 8. 16. por el quinto, que es 3. y cada vno de los cinco

co numeros 3. 6. 12. 24. 48. por el vltimo 3. ſe tomarà tambien la vnidad : y todos los diviſores de 144. ſeràn los ſiguientes : 1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 16. 18. 24. 36. 48. 72. 144.

PROP. XIX. Problema.

Hallar todos los diviſores de vna magnitud literal.

PArtaſe la magnitud dada por vna magnitud linear, ò ſimple : ò por vna que no ſe pueda partir mas que, ò por sì miſma, ò por la vnidad. Partaſe el quociente de la miſma ſuerte, y aſsi los demas. Hallenſe deſpues (16.) los productos alternativos diferentes, de todos los partidores iguales, ù deſiguales que ſe hallaron primero : y quedarà reſuelto el Problema. Los exemplos facilitaran la regla.

Exemplo 1. Pidenſe todos los diviſores de la magnitud $a^3b + aabb$.

Operacion. Partaſe la ſobredicha magnitud por a. y el quociente $aab + abb$. otra vez por a. y el nuevo quociente $ab + bb$. partaſe por b. y porque el vltimo quociente $a + b$. es ſimple, ò linear, ſe avràn ya hallado todos los partidores ſimples de la magnitud dada, que ſon a. a b. $a + b$. Hallados eſtos, ſe hallaràn los demas en la forma ſiguiente. Multipliqueſe el primero a. por el ſegundo a. y ſaldrà aa. y aſsimiſmo multipliqueſe por b. y ſaldrà ab. Multipliqueſe el miſmo a. por $a + b$. y ſaldrà $aa + bb$. Multipliqueſe deſpues b. por $a + b$. y ſaldrà $ab + bb$. que ſon todos los planos, ò binarios. Hecho eſto, ſe multiplicarà el primer binario aa. por b. que es la magnitud primera deſpues de a. en las primeras magnitudes, que ſon las lineares, ò ſimples : deſpues ſe multiplicarà la miſma aa. por $a + b$. y ſaldrà $a^3 + aab$. luego el binario ab. por $a + b$. y ſaldrà $aab + abb$. y vltimamente, el ternario aab. ſe multiplicarà por la vltima linear $a + b$. ò todas las quatro lineares conſecutivamente, y ſaldrà el quaternario $a^3b + aabb$.

Divi-

Divisores lineares.	a. a. b. a + b.
Divisor. binarios del 2. grad.	aa. ab. aa + ab. ab + bb.
Divisor. ternar. ù del 3. grad.	aab. a3 + aab. aab + abb.
Un quaternar. ù del 4. grad.	a3b + aabb. y la vnidad.

Y estos doze son todos los divisores justos de la magnitud dada, sin contar la vnidad.

Exemplo 2. Para hallar todos los partidores de la magnitud a6 + 2a4 cc + aac4. la parto primero por a. y el quociente a5 + 2a3 cc + ac4. otra vez por a. y porque el nuevo quociente a4 + 2aa cc + c4. no se puede partir, ni por a. ni por c. ni por a + c. ni por a — c. le parto por aa + cc. y porque el quociente que resulta es aun la misma magnitud aa + cc. que no tiene otro partidor mas que à sì misma, ò la vnidad, passo adelante la operacion, y multiplico el primer partidor a. por el segundo a. y es el producto aa. multiplico el mismo a. por el partidor aa + cc. y es el producto a3 + acc. assimismo aa. por aa + cc. produce a4 + aacc. y continuando la multiplicacion de aa + cc. y de cada vno de los vltimos productos a3 + acc. a4 + aacc. por el quarto aa + cc. hallo que todos los partidores de la magnitud dada son los diez siguientes, sin la vnidad: (a. (a. (aa. (aa + cc. (aa + cc.) (a3 + acc. (a4 + aacc. (a4 + 2aa cc + c4. (a5 + 2a3. cc + ac4. (a6 + 2a4. cc + aac4.) 1.

PROP. XX. Problema.

Hallar la mayor medida comun, ò mayor divisor comun de dos magnitudes literales.

HAllense todos los divisores simples, iguales, ù desiguales, de vna, y otra magnitud: y formando el producto de aquellos que se hallaren con igual distribucion en entrambas magnitudes, esse serà el divisor comun que se desea.

Exemp. 1. Para hallar el mayor divisor comun de las magnitudes abc. acd. tomarè todos los divisores simples a. b. c. d.

de la primera; y todos los divisores simples a. c. d. de la segunda; y porque veo que los dos divisores a. c. se hallan tantas vezes en la vna, como en la otra magnitud, multiplicoles vno por otro, y el producto ac. serà el mayor partidor comun.

Exemplo 2. Pidese el mayor divisor comun de las magnitudes a5.bbcd a3.b3.ddc.

Operacion. Los divisores simples que se hallen en vna, y otra magnitud, son a.a.a.b.b.d. formo su producto, que es a3.bbd. y este es el mayor partidor comun.

Exemplo 3. Se ha de hallar el mayor partidor comun de estas dos magnitudes: 4a6 ccm3p + a6 ccoomm. oopp z4 + 4mp3 z4. tomo todos los divisores simples de la primera, que son a.a.a.a.a.a.c.c.m.m.oo + 4mp. y todos los de la segunda, que son p.p.z.z.z.z.oo + 4mp. y por quanto solo el divisor oo + 4mp. se halla vna vez en cada parte, esse serà solamente el partidor comun de entrambas magnitudes, y, por consiguiente, el mayor.

PROP. XXI. Problema.

Hallar la mayor medida, ò divisor comun de tres magnitudes.

HAllese por la Prop. passada, la mayor medida comun de las dos magnitudes primeras: hallese despues la mayor medida comun entre la hallada, y la tercera magnitud; y esta sera la mayor medida comun de las tres, como consta de lo dicho en la Arithmetica Inferior.

Otra regla ay para resolver estos dos vltimos Problemas, que explicarèmos en su proprio lugar.



LI-

LIBRO II.

DE LAS REGLAS GENERALES de la Algebra, ò Arte Analytica.

UNica es, y general la regla de la Algebra, ò Arte Analytica, con que se resuelven todas las questiones, capazes de resolucion; pero consta de algunos preceptos parciales; y para la mayor facilidad, se añaden algunas reglas particulares, que se iran explicando en el discurso de este tratado, cada vna en su proprio lugár.

PROP. I. Problema.

Explicase la regla general de la Algebra.

LA regla general de la Algebra, en que se contiene todo su admirable artificio, consiste sumariamente en los preceptos siguientes.

1. En lugar de la magnitud incognita que se busca, se supondra vna de las vltimas letras del Abecedario, como x. y. z. &c. De suerte, que si se busca vn numero, ò lado, ò linea, se supondrá sencillamente dicha letra; pero si se busca vn quadrado, cubo, ò otra qualquiera potestad, se le añadirà à dicha letra el exponente proprio del quadrado, cubo, ù de aquella potestad, que se busca, como x2. x3. &c. En lugar de las magnitudes dadas, o que se suponen conocidas en la misma question, se pondran, ò los mismos numeros, ò en lugar de ellos, y de dichas magnitudes, se supondran las primeras letras del Abecedario, como a. b. c. &c. Esto se observara siempre, mientras que en algun caso particular no se advierta otra cosa.

2.Con

2. Con estos caracteres supuestos se executaràn todas las operaciones que pide la question, sumando, restando, multiplicando, ò partiendo hasta poder formar alguna igualacion.

3. Esta igualacion, si fuere necessario, se ordenarà, corregirà, y despejarà por las reglas que luego darèmos, de suerte, que en la vna parte de la igualacion estè la magnitud conocida; y en la otra parte, la incognita que se pretende conocer.

4. La magnitud conocida, que està sola en la vna parte de la igualacion, se partirà, si fuere menester, por el numero que acompaña al caracter de la magnitud ignorada, que se halla en la otra parte de la igualacion; y el quociente, ò alguna raiz del quociente, serà la magnitud que se busca, y quedarà resuelta la question.

En estos breves preceptos se comprehende todo el artificio de la regla Algebrica, y Analytica, los quales tienen tres partes, que son: *igualacion*, *reduccion*, y *valor del caracter*, que se explicaràn en particular en las Proposiciones siguientes; pero antes quiero declarar con vn exemplo la regla propuesta.

ENIGMA.

Pidense dos numeros que se diferencien en 40. y sumados hagan 100.

Supongo que el numero menor de los dos que se piden es z. con que el mayor serà $z + 40$. por aver de exceder al otro en 40. y porque los dos juntos han de hazer 100. la suma de los dos, que es $2z + 40$. es igual a 100. con que tengo la igualacion, y la escrivo en la forma siguiente: $2z + 40 \backsim 100$. y esta es la primera parte de la regla llamada, *igualacion*.

Passo a la segunda parte, que es la *reduccion*, y digo: Si $2z + 40$. es igual à 100. luego si se quitan 40. tanto de 2z. como de 100. los residuos seràn iguales, con que serà $2z \backsim 100 - 40$. esto es, $2z \backsim 60$. que es la segunda parte de la regla.

Vengo a la vltima, que es, *hallar el valor del caracter z.* y digo:

y digo: Si 2z. son 60. luego 1z. es 30. y queda resuelta la question, porque he hallado que el numero menor z. es 30. y por consiguiente el mayor $z + 40$. es lo mismo que 30. mas 40. que es 70. y los dos numeros 30. y 70. se diferencian en 40. y sumados, hazen 100. que es lo que pedia la question.

PROP. II. Theorema.

Explicase la igualacion, primera parte de la regla Algebrica.

DEFINICIONES.

1. *Igualacion, es la comparacion, ò cotejo de vna cantidad con otra igual, pero de diferente nombre, ò caracter*, como $x \frown b$. $z - - a \frown bz$. &c.

2. *Miembros de la igualacion*, son las cantidades que estàn à vna, y otra banda del cotejo; de las quales todas las que estàn àzia la mano izquierda, se llaman, *primer miembro*, y las que estan àzia la mano derecha, *segundo miembro*.

3. Los numeros, ò cantidades conocidas, que multiplican la incognita, se llaman, *coeficientes*, porque hazen con ella vn producto, como en $4x \frown b$. el numero 4. es *coeficiente*; y assimismo, en $az \frown b$. la conocida a. es *coeficiente*, por multiplicar la incognita.

PRINCIPIOS.

En que se fundan las reglas de la igualacion.

1. El Todo, es igual à todas sus partes juntas.
2. Las cantidades iguales à otra, son iguales entre sì.
3. Si à iguales se añaden, ò quitan iguales, quedan iguales.
4. Si iguales se multiplican, ò parten por iguales, quedan iguales.
5. Si las cantidades proporcionales se multiplican por vn mismo numero, quedan los productos en la misma proporcion; y si se parten por vn mismo partidor, quedan los quocientes en la misma proporcion.
6. La proporcion directa, es tambien alterna, conversa, &c.

7. Si

7. Si à proporcionales se añaden, ò quitan proporcionales semejantes, los que resultan, guardan tambien la misma proporcion.

8. En quatro proporcionales, el producto de los estremos es igual al producto de los medios; y en tres proporcionales, el producto de los estremos, es igual al quadrado del medio, y al contrario.

Ademas de estos principios, se avrà de valer el Analysta muchas vezes de otros Theoremas Geometricos, para hallar la igualacion que se pretende, singularmente en questiones tocantes à Geometria, como se verà en su lugar.

Reglas para la igualacion Algebrica.

LA igualacion, no se halla de otra suerte, que siguiendo el tenor de la question que se propuso, sumando, restando, multiplicando, ò partiendo el caracter supuesto, hasta encontrar con la igualacion; pero para executar esto con facilidad, serà bien advertir lo siguiente.

1. Antes de empezar la operacion, se han de procurar penetrar bien los terminos de la question; y se verà si se puede disponer con terminos mas claros; y siendo esto possible, se la dispondrà el Analysta a su gusto.

2. Si la question se propone contrahida à algun caso, que se narra por modo de historia, se procurarà abstraer, y puesta en terminos abstractos, se dispondrà mas facilmente la operacion; como si se propusiesse en esta forma: Pedro, y Juan compraron vna casa por 100. doblones, que pagaron entre los dos desigualmente, porque Pedro pagò 40. doblones mas que Juan, pidese quanto pagò cada vno? En terminos abstractos, es lo mismo que pedir dos numeros, que el mayor exceda al menor en 40. y que sumados hagan 100. que es la question resuelta en la proposicion passada.

3. Entendida bien la question, y puesta, si es menester en terminos mas claros, se substituiran las letras en lugar de las cantidades que se dàn, y piden en la question, como dixe en la Proposic. anteced. Advirtiendo, que muchas ve-

zes se puede poner vna misma letra por diferentes cantidades no conocidas; y es siempre que en la pregunta misma se dà la proporcion, ò diferencia de las dichas cantidades; como si se piden dos numeros en razon dupla, se supondrà ser el menor x. y el mayor 2x. Tambien si se piden dos numeros, de los quales, el mayor exceda al otro en 40. serà el menor x. y el mayor x + 40. ò el mayor x. y el menor x --- 40. y assi en otros casos semejantes. Pero regularmente es menester poner diferentes letras à diferentes cantidades incognitas, como veremos mas adelante. Hechas las suposiciones de las letras, y observando las advertencias sobredichas, se hallarà con facilidad la igualacion, siguiendo sencillamente el tenor de la propuesta.

PROP. V. Problema.

Explicase la reduccion, segunda parte de la Regla Algebrica.

Reduccion, es la operacion, con que la igualacion hallada, se reduce à vn estado, y disposicion, en que facilmente se pueda resolver, hallando la cantidad que se busca. Consiste lo primero, en despejar la incognita, y su valor, de suerte, que la incognita quede sola en el primer miembro de la igualacion; y su valor, en el segundo: esto se consigue por vna regla, llamada, *Antithesi, ò Transposicion*, y por la reduccion de la incognita a vnidad. Lo segundo, se ha de despejar tambien la igualacion de quebrados, si acaso los tuviere: executase por vna regla, llamada, *Isomeria.* Lo tercero, si fuere necessario, se harà la depresion, ò diminucion de caracteres, por vna regla, llamada, *Hipobibasmo.* Estas son las reglas principales, y faciles, con que se disponen las igualaciones: su explicacion es la siguiente.

REGLA I.

Antithesi, ò Transposicion.

SI la magnitud que se ha de despejar, và acompañada de otras magnitudes con signos en la misma parte de la igualacion, se borraràn alli todas las dichas magnitudes, y se passaràn à la otra

parte

parte de la igualacion con los ſignos contrarios à los que antes tenian, como ſe vè en las queſtiones ſiguientes.

QUESTION I.

Hallar vn numero, que añadiendole 5. la ſuma ſea 8.

PAra reſolver eſta queſtion, ſupongo que el numero que ſe pide es x. y añadiendole 5. ſegun requiere la propueſta, es $x + 5$. y porque eſta ſuma ha de ſer igual à 8. eſcrivo $x + 5 \backsim 8$. Expreſſada aſsi la queſtion, paſo el $+ 5$. que và con la incognita, à la otra parte de la igualacion con el ſigno contrario; y hallo $x \backsim 8 - 5$. eſto es, $8 \backsim 3$. con què 3. es el numero que ſe pide.

QUESTION II.

Hallar vn numero de quien quitando 4. reſten 8.

SEa x. el numero que ſe buſca, y quitandole 4. como pide la queſtion, el reſiduo ſe expreſſarà aſsi, $x - 4$. Y porque eſte ha de ſer igual à 8. ſerà la igualacion $x - 4 \backsim 8$. paſſando al ſegundo miembro el $- 4$. ſerà $x \backsim 8 + 4$. eſto es, $x \backsim 12$. y por conſiguiente 12. es el numero que ſe deſea.

Algunas vezes ſe facilitarà la tranſpoſicion variando todos los ſignos en ſus opueſtos, ſin exceptùar alguno, como en la queſtion ſiguiente.

QUESTION III.

Pideſe vn numero, que reſtado de 20. la reſta ſea 8.

SEa z. el numero que ſe pide; reſtole de 20. y es la reſta $20 - z$. y como aya de ſer igual à 8. ſerà la igualacion $20 - z \backsim 8$. puedo hazer la reduccion variando todos los ſignos, y ſerà $- 20 + z \backsim - 8$. hago aora la tranſpoſicion del 20. à la otra parte con el ſigno contrario, y ſerà $z \backsim 20 - 8$. eſto es, z. igual à 12. y eſte es el numero que ſe buſca.

Quando en ambas partes de la igualacion ſe hallare numero, ò caracter ſemejante con el ſigno +; el menor ſe paſſarà à la parte

del mayor con el ſigno — como en el exemplo ſiguiente.

QUESTION IV.

Hallar vn numero, que ſumado con 12. y ſu duplo ſumado con 4. ſalgan las ſumas iguales.

SEa z. el numero que ſe buſca, ſumado con 12. es $12 + z$. el duplo del miſmo numero z. es 2z. que ſumado con 4. haze $4 + 2z$. y porque eſtas ſumas han de ſer iguales, tengo la igualacion $12 + z \backsim 4 + 2z$. Para la reduccion, vſo de la Antitheſi, paſſando z. à la ſegunda parte de la igualacion; y es, $12 \backsim 4 + 2z - z$. eſto es, $12 \backsim 4 + z$. y paſſando el 4. à la primera parte, es $12 - 4$. eſto es, $8 \backsim z$. con que 8. es el numero que ſe pide.

Quando en ambas partes de la igualacion, ſe hallare numero, ò caracter ſemejante con el ſigno —, paſſarà el mayor à la parte del menor con el ſigno +, como en el exemplo ſiguiente.

QUESTION V.

Hallar vn numero, que reſtado de 12. y ſu duplo reſtado de 20. ſean los reſiduos iguales.

SEa y. el numero que ſe pide; reſtado de 12. es el reſiduo $12 - y$. el duplo del miſmo numero, reſtado de 20. dà el reſiduo $20 - 2y$. y porque eſtos reſiduos ſe ſuponen iguales, es la igualacion $12 - y \backsim 20 - 2y$. Hago la tranſpoſicion de 2y. que lleva mayor numero, y es la igualacion $12 - y + 2y \backsim 20$. eſto es, $12 + y \backsim 20$. y paſſando el 12. a la otra parte, es $y \backsim 20 - 12$. eſto es, $y \backsim 8$. es, pues, 8. el numero que ſe pide.

Demonſtracion de la regla.

L*A Antitheſi, ò tranſpoſicion no quita la igualdad*; porque paſſando la cantidad negativa a la otra parte de la igualacion con el ſigno +, ſe añade a entrambas partes vna miſma cantidad: como tambien, paſſando la cantidad po-

positiva à la otra parte con el signo —, se quita de entrambas partes vna misma cantidad: luego con la Antithesi, ò transposicion, añadimos, ò quitamos iguales à iguales; luego las cantidades quedaràn iguales.

REGLA II.

Reduccion de la incognita à la vnidad.

QUando la magnitud incognita que se quiere despejar, lleva consigo algun numero, ò magnitud coeficiente: supuesto que yà por la Antithesi se aya constituìdo sola en la vna parte de la igualacion, se le quitarà dicho numero, ò magnitud coeficiente; y este se escrivirà en la otra parte, debaxo del que se halla en esta, y quedarà formado vn quebrado, que serà el valor de la cantidad sobredicha: Como se aya de hazer esta reduccion quando la incognita tiene diferentes grados en la igualacion, se dirà en su lugar.

Exemplo. Si hecha la Antithesi, huviere quedado la igualacion en esta, ò semejante forma 2z ∾ 12. donde z. lleva el coeficiente 2. se reducirà a vnidad, borrando el 2. de la primera parte, y escriviendole baxo el 12. en esta forma, z ∾ $\frac{12}{2}$ donde se vè que partiendo 12. por 2. queda z ∾ 6. con que 6. es el valor de z. Assimismo, si la igualacion fuere az ∾ b. se reducirà à esta z ∾ $\frac{b}{a}$ y advierto, que la magnitud no queda del todo despejada, hasta que se aya hecho esta diligencia: pero quando el coeficiente es numero, se puede omitir la formacion del quebrado, pues quedara hecha la reduccion à vnidad, partiendo el valor, que està en la segunda parte, por el coeficiente, como en el exemplo arriba puesto, basta partir 12. por 2. y con esso se tiene z ∾ 6.

QUESTION VI.

Hallar vn numero, à cuyo duplo añadiendo 15. la suma sea 31.

SUpongo, que el numero que se pide es y. à su duplo 2y. añadiendo 15. es 2y + 15. y porque esto ha de ser

 31.

31. es la igualacion 2y + 15 ∽ 31. y por antithesi, es 2y ∽ 31 — : 15. esto es, 2y ∽ 16. reduzgo la y. à vnidad, para que quede del todo despejada; y es, segun la regla dada, y ∽ $\frac{16}{2}$ esto es, y ∽ 8. que es el numero que se pide. Fundase esta regla en que entrambas partes de la igualacion se parten por vn mismo numero; lo qual no quita la igualdad. (Axioma 4.)

QUESTION VII.

Hallar vn numero, que multiplicado por 5. y del producto quitando 80. resten 100.

SUpongo x. por el numero que se busca: multiplicado por 5. es 5x. quitados 80. de este producto, es el residuo 5x — 80. luego es la igualacion 5x — 80 ∽ 100. y por la antithesi es 5x ∽ 180. parto vltimamente 180. por 5. y el quociente 36. es el numero que se pide.

QUESTION VIII.

Hallar vn numero que multiplicado por 3. y el producto restado de 95. el residuo sea 50.

SEa z. el numero que se pide: multiplicado por 3. es el producto 3z. restandole de 95. es el residuo 95 — 3z. y porque este residuo ha de ser 50. Tengo la igualacion 95 — 3z ∽ 50. porque — 3z. es negativo, para hazerle positivo, le passo à la segunda parte de la igualacion, y es 95 ∽ 50 + 3z. y por antithesi 95 — 50 ∽ 3z. esto es, 45 ∽ 3z. y partiendo 45. por 3. es 15 ∽ z. con que 15. es el numero que se pide.

QUESTION IX.

Pidese vn numero tal, que si su duplo se resta de 60. y su triplo se suma con 15. la suma sea igual à la resta.

SEa el tal numero ſ. su duplo restado de 60. dà el residuo 60 — 2ſ. su triplo es 3ſ. y sumado con 15. es la su-

ſuma 3ſ + 15. y pues eſta ſuma ha de ſer igual à la reſta, es la igualacion 3ſ + 15 $\propto$ 60 --- 2ſ. Paſſando --- 2ſ. de la ſegunda à la primera parte de la igualacion, es 5ſ + 15 $\propto$ 60. y paſſando 15. à la otra parte, es 5ſ $\propto$ 60 --- 15. eſto es, 5ſ $\propto$ 45. y partiendo 45. por 5. es ſ $\propto$ 9. con que 9. es el numero que ſatisface la queſtion.

REGLA III.

Iſomeria.

QUando en la igualacion huviere quebrados, ſe ha de procurar deſpejarla de ellos en la forma ſiguiente. Si el quebrado es vno ſolo, multipliquenſe todos los terminos por el denominador del quebrado; y reſultarà vna nueva igualacion ſin quebrado alguno, advirtiendo, que multiplicar el quebrado por ſu denominador, es borrar el denominador, dexando ſolo el numerador.

QUESTION X.

Pideſe vn numero, que ſi de ſu quarto ſe quitan 3. el reſiduo ſea 6.

EL numero que ſe pide ſea x. ſu quarto es $\frac{x}{4}$ quitados 3. es el reſiduo $\frac{x}{4}$ --- 3. y porque eſte reſiduo ha de ſer 6. tengo la igualacion $\frac{x}{4}$ --- 3 $\propto$ 6. para quitar el quebrado, lo multiplico todo por el denominador 4. y es el producto la igualacion ſiguiente, x --- 12 $\propto$ 24. y paſſando el 12. à la otra parte, es x $\propto$ 36. y eſte es el numero que ſe buſca.

Si en la igualacion huviere muchos quebrados de diferente denominacion, ſe iràn multiplicando todos los terminos en la forma dicha, primero por el vn denominador, deſpues por el otro.

QUESTION XI.

Pideſe vn numero, que partido por 4. y añadiendole al quociente la mitad del miſmo numero, la ſuma ſea 6.

EL numero que ſe pide, ſea z. partido por 4. es el quociente $\frac{z}{4}$ añadiendo la mitad de z. es la ſu-

ma $\frac{z}{4} + \frac{z}{2} \backsim 6$. multiplico todos los terminos por el denominador 4. y ſerà la igualacion $z + \frac{4z}{2} \backsim 24$. multiplico aora todos eſtos terminos por el denominador 2. y es la igualacion $2z + 4z$. eſto es, $6z \backsim 48$. y partiendo 48. por 6. es, $z \backsim 8$. con que 8. es el numero que partido por 4. es el quociente 2. à quien ſi añadimos la mitad de 8. haze 6. como ſe pide.

Eſta regla ſe funda en que las dos partes de la igualacion ſe multiplican por vn miſmo numero, lo qual no deſtruye la igualdad. [Axioma 4.]

REGLA IV.

Hypobibaſmo, ò depreſsion de caracteres.

QUando todos los terminos de la igualacion ſon caracteres, ſin que aya numero alguno ſin letra, ſe harà la depreſion de caracteres, reſtando de todos los exponentes el exponente menor; y es lo miſmo que partir todos los terminos por el caracter menor (4.lib.1.) de que ſe ſeguirà quedar neceſſariamente algun numero ſin caracter, y reſolverà facilmente la queſtion, como ſe vè en las ſiguientes.

QVESTION XII.

Pideſe vn numero, que ſi ſe multiplica por 8. el producto ſea duplo de ſu quadrado.

SVpongo que el numero que ſe pide ſea v. multiplicado por 8. es el producto 8v. y porque eſte ha de ſer duplo del quadrado de v. ſe iguala à dos quadrados de v. es, pues, la igualacion $2v2 \backsim 8v$. donde ſe ve no ay numero ſin caracter, pues para que le aya, hago depreſsion de caracteres, reſtando el exponente menor 1. del mayor; y ſerà la igualacion $2v \backsim 8$. luego $v \backsim 4$. con que 4. es el numero que ſe pide.

QVES-

QVESTION XIII.

Dividir el numero 110. en dos partes, tales, que el producto de la vna por la otra sea decuplo del quadrado de la parte menor.

LA parte menor del numero dado 110. sea v. con que la otra parte serà 110---v. multiplicando la vna por la otra es el producto 110 v---vv. y porque este producto es el decuplo del quadrado de v. multiplicando el quadrado de v. por 10. serà la igualacion 110 v---vv ∽ 10 vv. y por antithesi serà 110 v ∽ 11vv. y por hypobibasmo, ù depresion de caracteres, es 110 ∽ 11v. vltimamente partiendo 110. por 11. es, v ∽ 10. y queda resuelta la question; porque siendo la parte menor 10. serà la mayor 110 ---v. lo mismo que 110---10. esto es, 100. y el producto de 100. por 10. es 1000. decuplo de 100. que es el quadrado de 10. parte menor.

PROP. IV. Problema.

Explicase el modo de hallar el valor de la magnitud incognita; tercera parte de la Regla Algebrica, llamada resolucion.

ESta es la vltima operacion, y el termino, y blanco à que tiran todas las reglas que se han explicado; consiste en hallar el valor de la letra que se supuso en lugar de la magnitud incognita, que se preguntaba en la question, con lo qual queda resuelta, y descifrado el enigma. Dispuesta, pues, y reducida la igualacion por las sobredichas reglas, vsara el Analysta de las que se siguen.

Reglas para hallar el valor de la incognita.

1. *SI hechas las reducciones en la Prop. antecedente, se hallare el caracter de la incognita, igual à vna cantidad conocida, y dicho caracter tuviere por exponente la vnidad, dicha cantidad conocida serà el numero que se busca, como se ha visto en las questiones que se han resuelto.*

2. Si

2. *Si dicho caracter de la incognita, tuviere por exponente 2. la raiz quadrada del numero conocido, ſerà la magnitud que ſe pide. Si el exponente del caracter fuere 3. ſe ſacarà la $\sqrt{3}$. de dicho numero: ſi fuere 4. ſe ſacarà la raiz $\sqrt{4}$. y eſſa raiz ſerà el numero que ſe buſca; y aſsi en las demàs poteſtades.*

3. *Si la incognita tuviere muchos grados en la igualacion, ſe ſacarà el valor de la incognita por las reglas que darè mas adelante, y eſſa ſerà la cantidad que ſe pide.*

La practica de eſtas Reglas, ſe facilitarà con las queſtiones que ſe reſolveràn en el libro ſiguiente.

Aqui ſe deſcubre la infinita extenſion de la Algebra, ò Arte Analytica, pues mientras ſe dèn los terminos baſtantes, y ſea la queſtion poſsible, llegarà el Analyſta à ſu reſolucion, porque ſiempre vendrà à terminarſe la operacion en alguna de las igualaciones ſobredichas, que ſe reſolveràn por las Reglas dadas, y por otras que ſe daràn en eſte Tratado.

PROP. V. THEOREMA.

Explicaſe la variedad de Problemas, è igualaciones.

1. SE dividen los Problemas en *ſimples*, ò *lineares*, y *compueſtos*. Los Problemas ſimples, ſon aquellos en que las magnitudes incognitas no ſuben à diferentes grados en la igualacion; y eſta igualacion, ſe llama tambien *linear*, ò *ſimple*, como $6z \backsim 48$. ò $6z + 6. \backsim 54$. Problemas *compueſtos*, ſon aquellos en que las magnitudes incognitas ſuben à diferentes grados en la igualacion; y eſtas igualaciones ſe llaman *compueſtas*, ù de muchas dimenſiones: ſi ſuben haſta el ſegundo grado, ſe llaman Problemas del ſegundo grado, ò planos de dos dimenſiones: ſi las incognitas ſuben al tercer grado, ſe llaman del tercer grado, ò ſolidos, ù de tres dimenſiones, y aſsi de los demas: de ſuerte, que toman ſu denominacion del grado mas alto, à que la cantidad no conocida ſe eleva; y la miſma denominacion tienen ſus igualaciones; y aſsi, $x2 + 3x \backsim 28$. es del ſegundo grado; $x3 + 3x2 + 2x \backsim 120$. es de tercer grado; como tambien $x3 + 5x \backsim 84$. y aſsi en los demas grados.

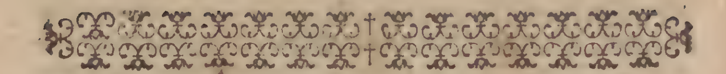
2. Se

2. Se dividen los Problemas en *reales*, è *impoſsibles*. Problemas *reales* ſon aquellos, cuyas igualaciones no incluyen abſurdo, ò incompoſsibilidad alguna. *Impoſsibles* ſon los que la incluyen; como ſi deſpues de concluida, y perficionada la igualacion, ſe hallare vna cantidad mayor igual à otra menor, ſeria la queſtion impoſsible: como $zz + 6 \backsim z - 4$. ò tambien otro qualquier genero de impoſsibilidad, como $z \backsim \sqrt{-aa}$. porque la $\sqrt{-aa}$. es cantidad impoſsible; pues ſiendo poſsible, ò avia de ſer poſitiva, ò negativa, y en entrambos caſos ſu quadrado ſeria $+aa$. como conſta del lib. 1. Prop. 3.

3. Tambien ſe dividen los Problemas en *determinados*, è *indeterminados*. *Determinados* ſon aquellos, que tienen vna ſolucion tan ſolamente, ò vn cierto, y determinado numero de ſoluciones. *Indeterminados* ſon los que pueden tener infinitas reſpueſtas. En los libros ſiguientes explicarè el modo de reſolver todas las ſobredichas eſpecies de Problemas por las reglas generales, y por otras particulares.

Advierto aora lo primero, que el valor del caracter no conocido, ſe ſuele llamar raiz de la igualacion: eſta puede ſer, ò poſitiva como $+5$. ò negativa como -5. Advierto lo ſegundo, que en qualquiera igualacion; ſi todas las cantidades que ay en la vna parte ſe paſſan a la otra con el ſigno contrario al que tenian, ſerà todo igual à nada: porque ſi de vna cantidad quitamos otra igual, queda nada: y aſsi, por ſer $zz + z \backsim 30$. vale la conſequencia: luego $zz + z - 30 \backsim 0$. De eſto nos valdrèmos en muchas ocaſiones, ſegun fuere meneſter.





LIBRO III.

DE LA ANALYSI DE LAS igualaciones ſimples.

PARA reducir à practica con mayor facilidad las reglas explicadas, reſuelvo en el diſcurſo deſte tratado las queſtiones, ò enigmas mas principales, à cuya imitacion podrà fabricar, y reſolver otras muchas el que deſeare adelantarſe en eſta Arte Analytica, y ſalir dieſtro en ſus operaciones. Explico en eſte libro la reſolucion de las queſtiones, cuyas igualaciones ſon ſimples. Eſtas pueden ſer de diferentes maneras: vnas, en que, ò ſolo ſe pide vna magnitud, y por conſiguiente baſta ſuponer vna ſola letra para ſu reſolucion; otras, en que ſe piden muchas magnitudes, y para reſolverlas ſe han de ſuponer diferentes letras; y tanto vnas como otras pueden ſer determinadas, ò indeterminadas. Repartirè ſu explicacion en diferentes capitulos, donde à mas de las reglas generales, darè otras para ſu mas facil reſolucion.

CAPITULO I.

DE LA RESOLUCION DE LAS QUESTIONES, EN QUE ſolo es meneſter ſuponer vna letra.

QUando en las queſtiones ſe pide vna ſola cantidad, ſe ſupone en ſu lugar vna ſola letra; pero ſi ſe piden dos, ſe han de ſuponer por ellas dos letras; y ſi tres, tres letras, &c. Eſto no obſtante, en muchas queſtio-

tiones ſe puede ſuponer vna letra ſola, aunque ſean muchas las incognitas que ſe piden, diſponiendo antes la planta de la queſtion por medio de algun diſcurſo; pero porque eſte es muchas vezes dificultoſo, ſe enſeñarà deſpues otro camino, para llegar à la reſolucion de ſemejantes queſtiones, que aunque ſea algo mas largo, ſerà menos trabajoſo.

QUESTION I.

Pideſe vn numero, que añadiendole 11. *ſea doblado del miſmo, ſi le quitamos* 7.

SUpongo, ſea dicho numero z. añadiendole 11. es $z + 11$. Al miſmo numero z. quitandole 7. es $z - 7$. Y porque la queſtion pide, que el $z + 11$. ſea doblado de $z - 7$. duplicando eſto ſegundo, ſerà igual con el primero: ſerà, pues, la igualacion $z + 11 \propto 2z - 14$. y por Antitheſi es $z + 25 \propto 2z$. y otra vez por Antitheſi ſerà $25 \propto 2z - z$. eſto es, $25 \propto z$. Digo, pues, que el numero que ſe pide es 25. à quien ſi ſe añaden 11. es 36. Y ſi del miſmo 25. ſe quitan 7. quedan 18. mitad de 36.

QUESTION II.

Pidenſe dos numeros, que ſe diferencien en 7. *tales, que ſi el menor ſe multiplica por* 2. *y al miſmo ſe añaden* 3. *y el mayor ſe multiplica por* 3. *y al producto ſe añade* 1. *ſea el mayor doblado del menor.*

SEa el numero menor x. y ſerà el mayor $x + 7$. Multiplicado el menor por 2. es $2x$. y añadiendole 3. es $2x + 3$. El mayor, multiplicado por 3. es $3x + 21$. y añadiendole 1. es $3x + 22$. Y porque eſte es duplo del menor, ſegun la propueſta, duplicando el menor ſeran ambos iguales: con que es la igualacion $4x + 6 \propto 3x + 22$. Quitando por Antitheſi $3x$. de cada parte, ſerà $x + 6 \propto 22$. y quitando 6. de cada parte, quedarà la x. deſpejada, y ſerà $x \propto 16$. Es, pues, 16. el numero menor, y el mayor $x + 7$. es 23. que ſatisfacen la queſtion.

QUES-

QUESTION III.

Pidenſe dos numeros, que ſe diferencien en 12. tales, que ſi de la mitad de ſu ſuma ſe quitan 6. queden 20.

SEa el numero menor v. con que el mayor ſerà v + 12. La ſuma de entrambos en 2v + 12. y la mitad de eſta ſuma es v + 6. reſtando de aqui 6. como pide la queſtion, queda v. que ha de ſer igual à 20. Luego el numero menor es 20. y el mayor 32.

QUESTION IV.

Pidenſe dos numeros, que ſumados hagan 100. y ſu diferencia ſea 20.

EL numero menor ſea v. el mayor ſerà v + 20. la ſuma de los dos ha de ſer 100. Luego es la igualacion 2v + 20 ∽ 100. y por Antitheſi, 2v ∽ 80. Luego v ∽ 40. ſon, pues, los numeros 60. y 40.

QUESTION V.

Pidenſe tres numeros, que ſumados hagan 70. y la diferencia del primero al ſegundo ſea 18. y la del ſegundo al tercero ſea 8.

ESte Problema, como tambien el antecedente, ſe puede proponer en eſta forma: *Dividaſe el numero 70. en tres partes, que la primera exceda à la ſegunda en 18. y eſta à la tercera en* 8. Pero la primera propueſta es mas clara. Sea, pues, y. el numero menor, y ſera, y + 8. el ſegundo: y el primero, y + 8 + 18. eſto es, y + 26. y porque ſumados han de hazer 70. ſera la ſuma 3y + 34 ∽ 70. luego por Antitheſi 3y ∽ 36. luego, y ∽ 12. Con que el numero menor es 12. que es el tercero: el ſegundo es 20. y el primero 38.

QUES-

QUESTION VI.

Pideſe, que el numero 140. ſe divida en dos partes, tales, que la mayor ſea quintupla de la menor, è incluya mas 20.

ESta queſtion, tambien ſe podia proponer, como las dos precedentes; pero la quiero reſolver ſiguiendo el tenor de la propueſta. Sea, pues, la parte menor x. luego la mayor ſerà 140---x. Eſta ha de ſer quintupla de la menor, y aun la ha de exceder en 20. Luego el quintuplo de la menor mas 20. ſerà igual à 140---x. y ſerà la igualacion 140---x ∽ 5x + 20. y por Antitheſi ſerà 140 ∽ 6x + 20. Luego tambien, quitando 20. de cada parte, es 120 ∽ 6x. y partiendolo todo por 6. es 20 ∽ x. Con que la parte menor es 20. y la mayor 120. que es quintupla de 20. è incluye mas otra vez el 20.

QUESTION VII.

Pideſe, que el numero 240. ſe divida en tres partes, que ſi la primera ſe parte por 5. la ſegunda por 3. y la tercera por 7. ſalga vn miſmo quociente.

ES lo miſmo, que pedir *vn numero, que multiplicado primero por 5. deſpues por 3. y vltimamente por 7. haga tres productos, que ſumados, hagan* 240. Supongo, pues, que el numero que ſe buſca es z. y ſeràn los tres productos 5z. 3z. 7z. ſumados ſon 15z. es, pues, la igualacion 15z ∽ 240. Parto 240. por 15. y es el quociente 16. ∽ z. con que ſon 5z ∽ 80. 3z ∽ 48. 7z ∽ 112. y eſtas ſon las tres partes de 240. que ſatisfacen la queſtion: porque partiendo 80. por 5. el 48. por 3. y el 112. por 7. ſale vn miſmo quociente 16.

QUESTION VIII.

Hallar dos numeros, que ſumados, hagan 100. y tengan entre ſi la razon de 6. con 4.

SUpongaſe y. por vn numero incognito: multipliqueſe por 6. y por 4. y ſeràn 6y. 4y. que tienen la razon de 6. con

6. con 4. y porque ſumados han de hazer 100. ſerà la igualacion $10y \propto 100$. y partiendolo todo por 10. es $y \propto 10$. Luego 6y. es 60. y 4y. es 40. ſon, pues, 60. y 40. los numeros que ſe piden.

Eſta miſma queſtion ſe puede proponer en la forma ſiguiente: *Dividaſe el numero* 100. *en dos partes, que tengan entre sì la razon de* 6. *con* 4. Y à mas del modo ſobredicho, ſe puede reſolver en eſta otra forma: ſea el numero mayor y. y el menor ſerà $100-y$. y porque eſtos han de tener entre sì la razon de 6. con 4. ſeràn quatro proporcionales $y.\ 100-y :: 6.\ 4.$ Luego el producto de los eſtremos, que es 4y. ſerà igual al producto de los medios $600-6y$. es, pues, la igualacion $4y \propto 600-6y$. y por antitheſi $10y \propto 600$. y partiendo por 10. es como antes $y \propto 60$. y el otro numero $100-y$. ſerà 40.

Por el primero de los modos ſobredichos, ſe reſolverà tambien eſta queſtion: *Pidenſe dos numeros, cuya diferencia ſea* 20. *y que tengan entre sì la razon de* 6. *con* 4.

QUESTION IX.

Dividir el numero 100. *en dos partes, tales, que añadiendole à la mayor* 20. *ſea tripla de la menor.*

LA mayor parte de 100. ſupongo ſea x. la menor ſerà $100-x$. Añadiendo 20. à la mayor, ſera $x+20$. Y porque ha de ſer tripla de la menor, multiplico $100-x$. por 3. y ſerà $300-3x$. y es la igualacion $x+20 \propto 300-3x$. Añado 3x. à cada parte, y ſerà $4x+20 \propto 300$. Y por antitheſi, quitando 20. de cada parte, es $4x \propto 280$. Y partiendo ambas partes por 4. es $x \propto 70$. Con que el mayor numero es 70. el otro $100-x$. ſerà 30. Si al mayor ſe añaden 20. es 90. triplo de 30. como pide la queſtion.

De aqui puede colegir el Analyſta el modo de reſolver las tres queſtiones ſiguientes.

1. *Hallar dos numeros, cuya diferencia ſea* 40. *y añadiendole al mayor* 20. *quede triplo del menor.*

2. *Hallar dos numeros, que ſumados hagan* 100. *y ſi del ma-*

mayor se restan 10. *quede duplo del menor.*

3. *Hallar dos numeros, cuya diferencia sea* 40. *y si del mayor se quitan* 10. *quede el residuo duplo del menor.*

QVESTION X.

Hallar vn numero, que restando de èl 30. *y* 40. *las restas sean como* 3. *con* 2.

SVpongo sea dicho numero z. hechas las restas, que pide la question, son los residuos $z - 30$. $z - 40$. que han de tener la razon de 3. con 2. Luego son quatro proporcionales : $z - 30 . z - 40 :: 3 . 2$. Luego el producto de los medios, es igual al de los estremos : con que es la igualacion: $3z - 120 \propto 2z - 60$. y por Antithesi $3z \propto 2z + 120 - 60$. esto es, $3z \propto 2z + 60$. y quitando 2z. de cada parte, serà $z \propto 60$. numero que se pide: porque restando de dicho numero 30. y 40. son los residuos 30. y 20. que son como 3. con 2.

De la misma manera se resolveràn las questiones siguientes.

1. *Pidese vn numero, que restado de* 140. *y de* 60. *los residuos sean como* 3. *con* 1.

2. *Pidese vn numero, que restado de* 180. *y restando* 60. *del mismo numero, sean los residuos como* 5. *con* 1.

3. *Pidese vn numero, que sumado con* 50. *y con* 7. *las sumas sean como* 4. *con* 3.

4. *Pidese vn numero, que si se suma con* 5. *y del mismo se restan* 8. *la suma con la resta sea como* 4. *con* 3.

5. *Pidese vn numero, que sumado con* 5. *y restado de* 25. *la suma con la resta sea como* 2. *con* 3.

QVESTION XI.

Hallar vn numero, que añadiendole su quarto exceda à 100. *en el mismo excesso en que* 100. *excede al dicho numero.*

PAra poder tomar el quarto sin quebrado, supongo que el numero que se pide es 4x. añadiendole su quarto es 5x. el excesso en que 5x. excede à 100. es $5x - 100$. y el

el exceſſo en que 100. excede à 4x. es $100 - 4x$. Luego es la igualacion $5x - 100 = 100 - 4x$. y añadiendo por Antitheſi 4x. a cada parte, ſerà $9x - 100. = 100.$ y añadiendo tambien 100. à cada parte, ſerà $9x = 200.$ y partiendolo todo por 9. ſerà $22.\frac{2}{9} = x.$ con que 4x. es 88. y ocho novenas, y eſte es el numero que ſe buſca, porque añadiendole ſu quarto, es 111. y vna novena parte, lo qual excede al 100. en 11. y vna novena; y en eſſo miſmo excede el 100. à 88. y ocho novenas.

QUESTION XII.

Pideſe vn numero, que multiplicado por ſus dos tercios, ſea el producto 486.

SUpongo, que el numero que ſe pide es 3y. ſus dos tercios ſon 2y. multiplicando 3y. por 2y. es el producto 6y2. igual à 486. Es, pues, la igualacion $6y2 = 486.$ y partiendolo todo por 6. es $y2 = 81.$ y ſacando la raiz quadrada de entrambas partes, es $y = 9.$ Con que el numero que ſe pide es 27. por averſe ſupueſto ſer 3y. el qual, multiplicado por ſus dos tercios, es 486.

QUESTION XIII.

Hallar dos numeros en razon tripla, tales, que multiplicando el mayor por el quadrado del menor, ſea el producto 192.

LOS numeros que ſe piden, ſean 3z. 1z. el quadrado del menor es 1z2. Multiplico 3z. por 1z2. y es el producto $3z3 = 192.$ Partiendolo todo por 3. es $z3. = 64.$ cuya raiz cubica es 4. y es el valor de z. Con que el numero mayor 3z. es 12. y el menor 4.

QUES-

QUESTION XIV.

Preguntanle à vno, quantos doblones tiene en el bolsillo; y responde: Si al numero de los doblones se añadiesse su mitad, su tercio, y su quarto, y de esta suma se quitasse el dozavo del mismo numero, quedarian 600. Pidese quantos doblones tiene.

ABstrayendo la propuesta, es lo mismo, que hallar vn numero, tal, que añadiendole su mitad, su tercio, y su quarto, y de esta suma quitando el dozavo del mismo numero, sobren 600.

Supongo, que el numero que se busca es 12y. para evitar quebrados: añadiendole su mitad, tercio, y quarto es 25y. quitando de 25y. el dozavo de 12y. quedan 24y ∽ 600. Hecha la particion por 24. se halla, y ∽ 25. Con que el numero supuesto 12y. es 300. Digo, pues, que tiene 300. doblones: la prueba es facil.

QUESTION XV.

Ay mil monedas, cuyo valor es 80. doblones: y en ellas se hallan dos especies, tales, que 10. de la vna hazen vn doblon; y 20. de la otra hazen tambien vn doblon. Pidese quantas ay de cada especie.

PRopuesta con abstraccion, es lo mismo que pedir, *se divida el numero 1000. en dos partes, que la vna, partida por 10. y la otra por 20. la suma de los qocientes sea 80.* O tambien evitando quebrados: *Dividir el numero 80. en dos partes, que la vna multiplicada por 10. y la otra por 20. la suma de los productos sea 1000.*

Sea, pues, la vna parte z. y la otra sera 80 — z. aquella multiplicada por 10. y esta por 20. son los productos 10z. 1600 — 20z. sumados hazen 1600 — 10z ∽ 1000. luego 1600 ∽ 1000 + 10z. luego por Antithesi 600 ∽ 10z. y partiendolo todo por 10. es 60 ∽ z. Con que el vn numero es 60. y el otro 20. Multiplicando, pues, 60. por 10. y 20. por 20. seran los productos 600. y 400. que son las mil monedas 600. de la vna especie, y 400. de la otra.

QUESTION XVI.

Tres hombres ſe reparten 455. eſcudos, de tal ſuerte, que quantas vezes el primero tiene 2. tiene el ſegundo 3. y quantas eſte tiene 4. tiene el tercero 5. Pideſe quantos eſcudos tiene cada vno.

ES lo miſmo que mandar, *ſe divida el numero 455. en tres partes, que la primera con la ſegunda ſea como 2. con 3. y la ſegunda con la tercera, como 4. con 5.*

Supongo, pues, que el primero tiene 8v. y el ſegundo tendrà 12v. y el tercero 15v. por evitar quebrados. Y porque ſegun la propueſta, los tres han de tener 455. ſumo las tres ſobredichas partidas, y ſerà la igualacion 35v ∽ 455. y partiendo por 35. es v ∽ 13. luego 8v ∽ 104. 12v ∽ 156. y 15v ∽ 195. Con que el primero tiene 104. eſcudos, el ſegundo 156. y el tercero 195.

QUESTION XVII.

Comprò vn Mercader 100. varas de paño: pidenle el precio de la vara, y reſponde: Tanto menos de 80. doblones me han coſtado 40. varas, quanto 50. varas me han coſtado menos de 95. doblones: colijaſe de aqui à como le coſtò la vara.

ES lo miſmo que *hallar vn numero, que multiplicandole por 40. y el producto reſtado de 80. y al miſmo numero multiplicandole por 50. y el producto reſtado de 95. ſean los reſiduos iguales.*

Supongo, que el numero que ſe buſca es x. multiplicado por 40. y por 50. ſon los productos 40x. 50x. reſtando el primero de 80. y el ſegundo de 95. ſeran los reſiduos iguales 80 — 40x ∽ 95 — 50x. Hecha la reduccion ſeran 15 ∽ 10x. y hecha la particion de 15. por 10. ſerà 1. y medio ∽ x. y eſte es el valor de la vara. La prueba es, que multiplicandole por 40. ſerà 60. el valor de 40. varas; y multiplicandole por 50. ſerà 75. el valor de 50. varas: y tanto es 60. menos que 80. quanto 75. es menos que 95.

QUES-

QUESTION XVIII.

Sobre el viage de Homero.

HOmero, Poeta cèlebre de Grecia, deseoso de saber qual fuesse su Patria, consultò à Apolo en Delphos. No quiso el Oraculo sacarle de la duda; pero le diò para su itinerario cierto numero de doblones. Partiòse con ellos à Sycion, Ciudad antigua del Peloponeso, donde gastò la mitad de lo que avia recibido; pero cantando sus versos mendigò de puerta en puerta 20. doblones. Passòse à Argos, donde aviendo gastado la quarta parte de lo que traia, cantando en la Plaza Mayor sus versos, recogiò del Pueblo 15. doblones. De alli se passò à la Isla Salamina, donde gastò el tercio de su dinero; pero con su acostumbrado exercicio recibiò del Pueblo 16. doblones. Llegò à Athenas, donde consumiò el sexto de lo que tenia; y oyendole cantar vn Cavallero, le diò 18. doblones. Saliòse de Athenas, y aviendose embarcado, se bolviò con viento favorable al Lugar de su habitacion; y aviendo pagado cinco doblones de flete, se hallò con doblado dinero del que le diò Apolo. Pidese quanto le diò en Delphos.

Para escusar quebrados, escojo vn numero, que tenga mitad, quarto, tercio, y sexto, que son las partes aliquotas, que entran en la propuesta: y assi supongo, que Apolo le diò 120x. de estos gastò la mitad en Sycion, con que le quedaron 60x. y aviendo adquirido alli 20. doblones, sacò de Sycion 60x + 20. Gastò la quarta parte de esto en Argos, que es 15x + 5. con que le quedaban 45x + 15. y aviendo recibido 15. doblones, saliò de Argos con 45x + 30. Gastò en Salamina el tercio, que es 15x + 10. luego le quedaban 30x + 20. Dieronle 16. luego saliò de Salamina con 30x + 36. Consumiò en Athenas el sexto, que es 5x + 6. luego le quedaron 25x + 30. Recibiò alli 18. luego saliò de Athenas con 25x + 48. y pagados los 5. doblones del flete, se hallò con 25x + 43. esto era doblado de los 120x. que recibiò de Apolo: Luego es la igualacion 25x + 43 ∽ 240x. y quitando 25x. de cada

parte, ſon $215x \backsim 43$. luego $x \backsim \frac{43}{215}$. eſto es, $x \backsim \frac{1}{5}$. luego $120x \backsim \frac{120}{5}$. de doblon: eſto es, $120x \backsim 24$. doblones: y eſta es la cantidad que recibiò de Apolo.

QUESTION XIX.

Preguntado Artemidoro Philoſopho, què edad tenia Alexandro Magno, diò, ſegun el Obiſpo Caramuel, la reſpueſta ſiguiente.

PReguntaba Diodoro,
Embaxador del Principe de Egypto,
Què edad tenia el Macedon invicto:
Y luego Artemidoro
Le reſponde ingenioſo:
Dos años tiene mas el belicoſo
Rey, què ſu camarada
Epheſtion, cuyo Padre
Con quatro los de entrambos numeraba,
Y el Padre de Alexandro
Quando noventa y ſeis gyros de Apolo,
Los años de ellos tres contaba ſolo.

Que en pocas palabras fuè la reſpueſta, que Alexandro tenia dos años mas que Epheſtion; y el Padre de eſte excedìa en quatro años la edad de entrambos: y el Padre de Alexandro, contando yà noventa y ſeis, tenia tanta edad como los tres juntos. Infiereſe, pues, de aqui facilmente la edad de Alexandro.

Supongo, que la edad de Epheſtion era $1v$. Con que la de Alexandro era $1v + 2$. Y porque el Padre de Epheſtion tenia la edad de entrambos, y 4. años mas, ſerà ſu edad $2v + 6$. Y ſiendo la de Philipo, Padre de Alexandro, 96. años, y eſta era igual a la de los tres, tengo la igualacion $4v + 8 \backsim 96$. Y por Antitheſi, quitando 8. de cada parte, ſerà $4v \backsim 88$. y partiendolo todo por 4. es $v \backsim 22$. Era, pues, la edad de Epheſtion 22. años, y la de

de Alexandro 24. El Padre de Epheſtion tenia 50. y el Padre de Alexandro 96.

QUESTION XX.

Preguntò Hercules à Augèo, Rey de los Eleos, quantas Bacas tenia: la reſpueſta fuè, vn enredado Enigma, que propuſo el Obiſpo Caramuel en vn certamen Mathematico, en la forma ſiguiente.

Hercules vino à viſitar à Augèo,
Que era muy opulento,
Y teniendo deſeo
De robarle ſus bacas ciento à ciento,
Pregunta con cuidado
El numero, y lugar de ſu ganado.
Yo, Señor, dize el venerable Anciano,
Brevemente reſpondo,
Que en aquel rico llano,
Cuya orla es oro, y eſmeralda el fondo,
A la margen de Alphèo
La mitad de mis bacas pacer veo.
La octava parte de Saturno el monte
Turba con ſus bramidos;
Y en diſtante orizonte
La duodezima tiene deſtruidos
Los valles: que es muy fiera
En el monte, en el prado, en la ribera;
La vigeſima parte
En Elide ſegura ſe apacienta:
De Arcadia yà ſe aparta
La trigeſima; y corren por mi cuenta
Cinquenta, cuyas vozes
Oy ſon ſuaves, y mañana atrozes.
Mover la clava, pero no la pluma
Sabe el hijo de Alcmena;
Y aſsi ſe queda ſin ſaber la ſuma
Del ganado, que por los montes ſuena?
Tu, que eres mas experto,
El numero deſcubre, que he encubierto.

En ſuma, lo que ſe pide es, *vn numero, de quien reſtando ſu mitad, ſu octava parte, ſu duodezima, ſu vigeſima, y ſu trigeſima, queden* 50. Para evitar quebrados, eſcojo vn numero, que conſte de mitad, octava parte, duodezima, &c. y le multiplico por vn incognito x. Supongo, pues, tenia Augèo 120x. reſtando de aqui ſu mitad 60x. ſu octava parte 15x. ſu duodezima 10x. ſu vigeſima 6x. y ſu trigeſima 4x. el reſiduo es 25x. que aviendo de ſer igual à 50. tengo la igualacion 25x ∽ 50. y partiendo por 25. ſale x ∽ 2. luego 120x ∽ 240. luego tenia Augeo 240. bacas, de las quales avia 120. en Alpheo, en el monte de Saturno 30. en los otros valles 20. en Elide 12. y en Arcadia 8. y las reſtantes 50. en ſu propria caſa.

QUESTION XXI.

Pideſe que el numero 90. *ſe divida en dos partes, què compongan con el miſmo* 90. *vna progreſsion Arithmètica.*

SEa la vna parte z. la otra ſera *90--z.* eſtas dos con *90.* han de hazer tres terminos Arithmeticamente proporcionales: luego la ſuma del primero, y vltimo, ſerà igual al duplo del medio: es, pues, la igualacion 90.-+ z ∽ 180 --2z. luego por Antitheſi ſera *90* -+ 3z ∽ 180. y quitando *90.* de cada parte, ſera 3z ∽ *90.* luego z ∽ 30. Es, pues, la primera parte 30. la ſegunda 60. y el tercer termino 90.

QVESTION XXII.

Dividir el numero 120. (*ſi es poſsible*) *en ſeis partes, que ſe excedan en* 2.

ES lo miſmo, que *hallar ſeis numeros, que ſe vayan excediendo en* 2. *y que ſumados hagan* 120.

Sea el primero v. el ſegundo ſerà v -+ 2. el tercero v -+ 4. el quarto v -+ 6. el quinto v -+ 8. y el ſexto v -+ 10. La ſuma de todos es 6v -+ 30 ∽ 120. y por Antitheſi 6v ∽ 90. luego v ∽ 15. es, pues, la ſerie que ſe pide 15. 17. 19. 21. 23. 25. que ſumados, hazen 120.

QUES-

QUESTION XXIII.

Dividir el numero 81. (si es possible) en seis partes Arithmeticamente proporcionales, y la primera sea 6.

ES lo mismo que *buscar seis numeros, que se excedan igualmente, de los quales, el primero sea 6. y la suma de todos 81.* Supongo que el excesso sea x. con que el primero serà 6. el segundo $6 + x$. el tercero $6 + 2x$. el quarto $6 + 3x$. el quinto $6 + 4x$. y el sexto $6 + 5x$. la suma de todos es $36. + 15x \frown 81$. y por Antithesi serà $15x \frown 45$. luego $x \frown 3$. Con que el excesso es 3. y son los numeros 6.9.12.15.18.21. cuya suma es 81.

CAPITULO II.

DE LA RESOLUCION DE LAS QUESTIONES, en que se suponen diferentes letras por diferentes magnitudes incognitas.

Regla general para resolver las questiones, en que se buscan diferentes magnitudes.

1. QUando en la question se piden diferentes cantidades, se supondrà por cada vna de ellas su letra particular de las vltimas del Abecedario; y por las magnitudes conocidas, se supondràn las primeras letras, ò los mismos numeros, como en otro lugar queda dicho.

2. Con estas letras se obrarà siguiendo el tenor de la question, procurando igualar cada magnitud incognita con alguna de las conocidas, quanto permitiere la question; y cuidando, quanto fuere possible, igualar cada vna de las incognitas con diferentes magnitudes.

3. En viendo que vna misma incognita es igual à cada vna de otras dos magnitudes, formarà el Analysta la igua-

la-

lacion de estas dos entre sì, dexando yà la sobredicha incognita: y continuando esto mismo con las demàs, lograrà excluir las incognitas, hasta dexar vna sola en la igualacion, cuyo valor darà satisfaccion à la propuesta.

4. Todo el artificio para despejar del modo sobredicho la igualacion, consiste en substituir vna cantidad, en lugar de otra; porque si vna cantidad, como por exemplo z. es igual à x + 4. no ay duda, que en todas las igualaciones, en que se hallare z. se podrà poner en su lugar x + 4. con que quedarà excluida la z. y assi, con esta diligencia se iràn excluyendo las incognitas, hasta que en las igualaciones solo quede vna, con que la question quede resuelta. Para hazer con acierto estas substituciones, serviràn las reglas siguientes.

Reglas para las substituciones.

1. *Para substituir vna cantidad en lugar de otra, se multiplicarà la que se quiere substituir, por el numero que lleva la que se pretende excluir; y el producto se pondrà en lugar de la excluìda.*

Exemplo 1. Si se quiere substituir 4 — 6y. en lugar de x. en esta cantidad 8 — 3x. en que la x. lleva el — 3. se multiplicarà 4 — 6y. por — 3. y el producto — 12 + 18y. se substituirà en lugar de — 3x. y resultarà 8 — 12. + 18y.

Exemplo 2. Si en la cantidad 8 + 3z. quiero substituir 6v — 2. en lugar de z. multiplicarè 6v — 2. por + 3. y el producto + 18v — 6. le pondre en lugar de + 3z. sin omitir el signo +, que acompaña al 18v — 6. y resultarà 8 + 18v — 6.

Exemplo 3. Para substituir $\frac{7 + 4y}{5}$ en lugar de v. en la igualacion 6v + y ∽ 20. se multiplicarà el sobredicho quebrado por 6. y el propucto $\frac{42 + 24y}{5}$ puesto en lugar de 6v. darà $\frac{42 + 24y}{5}$ + y ∽ 20.

Exem-

Exemplo 4. Si ſe ha de ſubſtituir $\frac{10 - 3z}{2}$ en lugar de ſ. en la igualacion $4ſ - 5z \backsim 6$. ſe multiplicarà la fraccion por 4. y ſerà $\frac{40 - 12z}{2}$ que reducida à entero es, $20 - 6z$. y poniendola en lugar de 4ſ. ſerà la igualacion $20 - 6z - 5z \backsim 6$.

2. *Quando la cantidad que ſe quiere excluir no tiene numero, y es poſitiva, no ay neceſsidad de multiplicacion alguna.*

Exemplo 5. Se ha de ſubſtituir $3 - 5v$. en lugar de ſ. en la cantidad $8 + ſ$. Pongaſe $+ 3 - 5v$. en lugar de ſ. y reſultarà $8 + 3 - 5v$.

3. *Pero quando la cantidad que en virtud de la ſubſtitucion ſe quiere excluir, es negativa, es meneſter variar los ſignos de la cantidad que ſe ſubſtituye, como piden las reglas de la multiplicacion.*

Exemplo 6. Se ha de ſubſtituir $3 - 5v$. en lugar de x. en la cantidad $8 - x$. varienſe los ſignos, y ſe pondrà $- 3 + 5v$. en lugar de $- x$. y reſultarà $8 - 3 + 5v$.

Uno de los principales fines de eſta ſubſtitucion es, deſpejar las igualaciones, excluyendo de ellas las magnitudes incognitas, porque aviendo muchas, impiden las vnas el conocimiento de las otras, è impoſsibilitan la reſolucion; y aſsi, ſabiendo por exemplo, que z. vale 5. y que $v \backsim 8 + 2z$. poniendo 5. en lugar de z. ſe ſabe que $v \backsim 8 + 10$. eſto es, $v \backsim 18$. con que queda conocido el valor de v.

METHODO I.

De reſolver por ſubſtitucion.

DOs coſas ſe deben obſervar en eſte punto, y ſon hazer con todo cuidado las ſubſtituciones; y deſpues de hechas diſponer con buen orden las igualaciones que incluye la queſtion: De la primera depende totalmente el acierto; y de la ſegunda, la facilidad en el obrar. Y es de advertir, que aſsi como ay queſtiones, que ſe pueden reſolver con ſola la reduccion del caracter incognito à vnidad; aſsi tambien ay algunas que ſe pueden reſolver por ſola la ſubſtitucion; y eſtas ſon las que en cada igualacion tienen

ſolitariamente en la vna parte, vna cantidad incognita, que no ſe halla en las igualaciones antecedentes; como en eſte exemplo.

Donde ſe vè que z. que eſtà ſolitaria en la ſegunda igualacion, no ſe halla en la primera; como, ni la v. en las dos que la preceden; y aſsi de las demàs. Con eſta diſpoſicion es muy facil la reſolucion; y aſsi, ſe deben procurar reducir, y ordenar las igualaciones de la queſtion en la forma dicha; y ſi eſto no ſe pudiere, ſe obrarà ſegun las reglas de la Methodo 2. que deſpues darèmos.

$y \backsim 2.$
$z \backsim 1 + y.$
$v \backsim 1 + z.$
$x \backsim 6 - y - z.$

Aviendo, pues, dado à las igualaciones que reſultaron de la queſtion, la forma dicha, ſe ſubſtituirà el valor de la primera, en la ſegunda igualacion; y el de la primera, y ſegunda, en la tercera; y el de la primera, ſegunda, y tercera, en la quarta, y aſsi en las demàs que ſe ſiguieren, cada vno en lugar de ſu propria incognita: como en el exemplo propueſto, ſe tomarà el 2. que es el valor de y. en la igualacion primera, y ſe ſubſtituirà en la ſegunda; y eſta, que era $z \backsim 1 + y.$ ſe hallarà ſer $z \backsim 1 + 2.$ eſto es, $z \backsim 3.$ con que yà ſe ſabe ſer y. lo miſmo que 2. y la z. lo miſmo que 3. Proſigaſe aora, ſubſtituyendo eſtos dos valores yà conocidos en la tercera igualacion, poniendo 3. en lugar de z. ſolamente, por quanto alli no ſe halla la y. y ſerà $v \backsim 4.$ con que los valores de las tres primeras incognitas ſon 2. 3. 4. ſubſtituyanſe aora en la quarta igualacion dichos tres valores conocidos, ſegun fuere meneſter, cada vno en lugar de la incognita à quien correſponde: eſto es, 2. en lugar de y. 3. en lugar de z. ſolamente por no hallarſe alli la v. y en virtud de eſta ſubſtitucion, ſerà $x \backsim 6 - 2 - 3.$ eſto es, $x \backsim 1.$ con lo qual quedan yà conocidas todas las cantidades que ſe ignoraban. Veaſe eſto practicado en las queſtiones ſiguientes.

QUES-

QUESTION XXIV.

Hallar dos numeros, cuya diferencia ſea 2. y ſu ſuma ſea 8.

SUpongo ſea el mayor x. y el menor y. con que la diferencia ſerà $x - y$. que ſegun la queſtion es igual à 2. luego tengo la primera igualacion $x - y \backsim 2$. la ſuma de los miſmos numeros es $x + y$. eſta es igual à 8. ſegun la propueſta: luego es la ſegunda igualacion $x + y \backsim 8$. con que la queſtion ſe expreſſa en las dos igualaciones ſiguientes.

$$x - y \backsim 2.$$
$$x + y \backsim 8.$$

En la primera, vſando de la antitheſi, hallo $x \backsim 2 + y$. ſubſtituyò $2 + y$. (que es lo miſmo que x.) en la ſegunda igualacion, y ſerà $2 + y + y \backsim 8$. eſto es, $2 + 2y \backsim 8$. y por antitheſi $2y \backsim 6$. luego $y \backsim 3$.

Conocido ya el valor de la y. ſe conocerà el de x. ſubſtituyendo 3. en lugar de la y. en la primera igualacion deſpejada $x \backsim 2 + y$. con que reſultarà $x \backsim 2 + 3$. eſto es, $x \backsim 5$. con que los numeros que ſe buſcan ſon 5. y 3.

Eſta miſma queſtion ſe propuſo num. 4. y ſe reſolviò de otra manera algo mas breve; pero eſta methodo es vniverſal para todas las queſtiones, en quien concurren diferentes cantidades incognitas: à mas de los dichos veanſe los dos modos ſiguientes.

Otro modo. Sumenſe las dos igualaciones, como aqui ſe vè, y es la ſuma $2x \backsim 10$. luego, $x \backsim 5$. como antes; reſto 5. de 8. y ſerà el reſiduo 3. igual à y. El ſeñal * denota averſe deſaparecido la magnitud, que alli ſe avia de colocar: Tengaſe eſto advertido para otras ocaſiones.

$$x - y \backsim 2.$$
$$x + y \backsim 8.$$
$$\overline{2x \quad * \backsim 10.}$$

Otro modo. Reſteſe la menor igualacion de la mayor, y es el reſiduo $2y \backsim 6$. luego $y \backsim 3$. como antes; reſteſe 3. de 8. y ſale 5. por valor de x.

$$x + y \backsim 8.$$
$$x - y \backsim 2.$$
$$\overline{2y \backsim 6.}$$

QUES-

QUESTION XXV.

Pidense dos numeros con estas condiciones, que si el primero se multiplica por 5. y del producto se resta el quadruplo del segundo; el residuo sea 7. y que el segundo con seis vezes el primero haga 20.

SEa t. el primero de los numeros que se piden; y sea v. el segundo. La primera condicion de la propuesta darà esta igualacion, $5t - 4v \backsim 7$. y la segunda darà $6t + v \backsim 20$. con que la question se expressa en estas dos igualaciones.

$$5t - 4v \backsim 7.$$
$$6t + v \backsim 20.$$

Hago por antithesi, que la t. quede sola en la vna parte de la primera igualacion, passando à la otra parte primeramente las 4v. y serà $5t \backsim 7 + 4v$. y partiendo entrambas partes por 5. serà $t \backsim \frac{7 + 4v}{5}$ substituyo aora este valor de t. en lugar suyo en la segunda igualacion, y serà $\frac{42 + 24v}{5} + v \backsim 20$. y multiplicandolo todo por el denominador 5. serà $42 + 24v + 5v \backsim 100$. esto es, $42 + 29v \backsim 100$. luego $29v \backsim 58$. luego $v \backsim 2$.

Hecho esto, passo à buscar el valor de t. y para mayor facilidad escojo $5t \backsim 7 + 4v$. en la qual substituyo 2. en lugar de v. por aver hallado ser este su valor, y serà $5t \backsim 7 + 8$. esto es, $5t \backsim 15$. luego $t \backsim 3$. Son, pues, los numeros que se piden 3.2.

QUESTION XXVI.

Hallar dos numeros tales, que el duplo del primero con el triplo del segundo sea 10. y que si del quadruplo del primero, se quita el quintuplo del segundo, resten 6.

SEa el vn numero x. y el otro sea z. y se expressarà la question en estas dos igualaciones.

$$2x + 3z \backsim 10.$$
$$4x - 5z \backsim 6.$$

La

La primera igualacion, vſando de las reglas ordinarias, ſe vendrà à reducir à la ſiguiente $x \backsim \frac{10-3z}{2}$. y ſubſtituyendo eſte valor de x. en la ſegunda igualacion, ſaldrà $\frac{40-12z}{2} - 5z \backsim 6$. y abreviando la fraccion, quedarà reducida la igualacion à eſta, $20-6z-5z \backsim 6$. eſto es, $20-11z \backsim 6$. luego $11z \backsim 14$. luego z. igual à 14. onzeavos, y eſte es el vno de los numeros que ſe piden.

Para hallar el otro, ſe ſubſtituira eſte valor de z. en la igualacion arriba pueſta $x \backsim \frac{10-3z}{2}$ ò en eſta $2x \backsim 10-3z$. y la ſubſtitucion darà $2x \backsim 10-42$. onzeavos; y multiplicandolo todo por el denominador 11. ſerà $22x \backsim 110-42$. eſto es, $22x \backsim 68$. luego $x \backsim 34$. onzeavos, con que los dos numeros que ſe piden, ſon 34. onzeavos, y catorze onzeavos; eſto es, $3\frac{1}{11}$ y $1\frac{3}{11}$

QUESTION XXVII.

Hallar tres numeros tales, que la ſuma de los dos primeros ſea 4. la del primero, y vltimo ſea 6. y la de los dos vltimos ſea 8.

SUpongo, que el primero es x. el ſegundo z. y el tercero y. y ſe expreſſarà la queſtion en las tres igualaciones ſiguientes.

$$z + x \backsim 4.$$
$$x + y \backsim 6.$$
$$z + y \backsim 8.$$

La primera ſe reduce por antitheſi à eſta, $x \backsim 4 - z$. ſubſtituyo eſte valor de x. en lugar de x. en la ſegunda igualacion; y ſerà $4 - z + y \backsim 6$. y por antitheſi $y - z \backsim 2$. con eſto queda la queſtion reducida à eſtas dos igualaciones; con lo qual ſe reſolverà la queſtion por qualquiera de los modos con que ſe reſolviò la queſtion 24. y ſe hallarà ſer $x \backsim 1$. $z \backsim 3$. $y \backsim 5$. Son, pues, los tres numeros 1.3.5.

$$y - z \backsim 2.$$
$$y + z \backsim 8.$$

QVESTION XXVIII.

Avia en el mar cierto numero de Nimphas, llamadas Galateas; y en la Ribera otras, llamadas Napeas: consultado Apolo para que declarase el numero de vnas, y otras; respondiò lo que refiere el Obispo Caramuel en las octavas siguientes.

ENtre liquida plata
Descubrì no sè quantas Galateas;
Y donde se remata
La selva obscura, vn Coro de Napeas;
Thetis à todas en el mar retrata:
Bellas aquellas eran, estas feas;
En numero no iguales,
Porque en especie eran desiguales.

No pudiendo contarlas,
Consultè à Apolo, que en el mar lucia,
Y doradas guirnaldas
De perlas desatadas las texia;
Y el Dios intenso, para mas honrarlas,
No me quiso dezir lo que sabia:
Pero al son de las olas
Cantò eloquente estas palabras solas.

Si dexan sus cristales
Tres Nimphas bellas, que à la selva llama
La hermosissima Pales,
Adornada de flores, no de escama,
En numero seràn todas iguales:
Pero si viendo que Tritòn las ama,
Al mar vàn tres Napeas,
seràn doblado mas las Galateas.

Es lo mismo que *hallar dos numeros, que si del mayor se quitan tres, y se añaden al menor, queden iguales; y si del menor se quitan tres, y se añaden al mayor, sea este doblado del menor.*

Supongo, pues, que el numero mayor, ù de las Galateas

teas ſea t. y el menor; ù de las Napeas ſea v. y ſiguiendo la propueſta, ſe formaràn las dos ſiguientes igualaciones.

$$t - 3 \propto v + 3.$$
$$t + 3 \propto 2v - 6.$$

Y deſpejando la t. por Antitheſi en la primera, ſerà $t \propto v + 6$. y ſubſtituyendo eſte valor de t. en la ſegunda, reſultarà $v \propto 15$. con que el numero menor es 15. y ſubſtituyendo 15. en lugar de v. en la igualacion $t \propto v + 6$. ſe hallarà $t \propto 21$. Era, pues, el numero de las Galateas 21. y el de las Napeas 15. con que ſi de las Galateas ſe paſſan tres à las Napeas, quedan entrambos numeros iguales; pero ſi de las Napeas vàn tres a las Galateas, ſeran eſtas 24. y aquellas 12. y por conſiguiente las Galateas dobladas de las Napeas, como dize la queſtion.

QUESTION XXIX.

Dize Pedro à Juan, ſi me dàs 23. libras, tendrè tres vezes mas que tu: Dize Juan à Pedro, ſi me dàs 23. libras, tendre ſiete vezes mas que tu: Pideſe quanto tenia cada uno.

SUpongo que Pedro tiene x. y Juan tiene y. quitandole à Juan 23. le quedaran $y - 23$. y dandole à Pedro eſtos 23. tendra $x + 23$. y porque eſta cantidad es tres vezes mas que $y - 23$. multiplicando eſta por 3. ſeràn entrambas iguales; con que la primera igualacion, es $x + 23 \propto 3y - 69$. Paſſando à la ſegunda parte de la propueſta; ſi ſe le quitan à Pedro 23. quedarà con $x - 23$. y dandoſeles à Juan, tendra eſte $y + 23$. y porque hecho eſto, ha de ſer eſta vltima cantidad ſeptupla de la primera, para que ſean iguales, ſe multiplicarà $x - 23$. por 7. y ſera la ſegunda igualacion $y + 23 \propto 7x - 161$. Y quedarà expreſſada la propueſta en eſtas dos igualaciones.

$$x + 23 \propto 3y - 69.$$
$$y + 23 \propto 7x - 161.$$

Deſpejando en la primera la x. y en la ſegunda la y. reſultaràn por Antitheſi las dos ſiguientes.

$$x \propto 3y -- 92.$$
$$y \propto 7x -- 184.$$

Subſtituyo el valor de y. hallado, que es $7x -- 184$. en la primera igualacion $x \propto 3y -- 92$. y reſultarà $x \propto 21x -- 644$. y por antitheſi es $20x \propto 644$. luego $x \propto 32$. y 4. veinteavos de libra, ò 4. ſueldos; y eſto es lo que tenia Pedro; y ſubſtituyendo en la ſegunda igualacion eſte vltimo valor de x. ſe hallarà $y \propto 41$. lib. 8. ſueldos; y eſto es lo que tenia Juan; y queda reſuelta la queſtion, como facilmente ſe puede probar.

En eſta forma ſe podràn reſolver muchas queſtiones ſemejantes, mientras ſe puedan facilmente diſponer ſus igualaciones en la forma ſobredicha; pero de otra ſuerte ſerà meneſter vſar de la Methodo ſiguiente, que ſirve para evitar eſſe trabajo.

METHODO II.

De reſolver por ſubſtitucion.

TOdas eſtas Methodos tiran à vn miſmo blanco, y fin, que es hazer con facilidad, y buen orden las ſubſtituciones, de ſuerte, que vengan à deſaparecerſe, y extinguirſe en las igualaciones las magnitudes incognitas, haſta que ſolamente quede vna, con que ſe deſcifre el enigma: La que aqui explico es de Monſ. Rollè, y juzgo ſer la mejor, por la gran claridad, y buen orden que lleva: ſus reglas ſon las ſiguientes.

1. Preparenſe primeramente dos columnas, como ſe vèn mas abaxo: de las quales, la primera ſe llamarà, *columna de direccion*; y la ſegunda, *columna del retorno*: eſtas ſerviràn para eſcrivir en ellas con buen orden las igualaciones, como luego dirè.

2. Hecho eſto, hagaſe la expreſsion de la queſtion propueſta, como en las antecedentes, formando las igualaciones que fueren meneſter, procurando deſpejarlas de quebra-

brados : luego ſe eſcriviràn en el principio de la columna de direccion ; y con ellas quedarà formada la primera claſe de igualaciones.

3. Elijaſe à arbitrio vna de las ſobredichas igualaciones, y deſpejeſe, reduciendola à eſtado en que vna de las magnitudes incognitas, la que ſe quiſiere, quede ſola en la vna parte de la igualacion, y ſu valor en la otra, lo que ſe haze por la Antitheſi, como hemos viſto en las queſtiones que ſe han reſuelto. Eſta igualacion aſsi diſpueſta, eſcrivaſe en la columna del retorno en lo inferior de ſu primera claſe.

4. Eſte valor hallado de la incognita, qne ſe deſpejò, ſe irà ſubſtituyendo en todas las igualaciones de la columna de direccion, en que ſe hallare dicha magnitud incognita, exceptuando aquella que ſe eſcogiò para la reduccion, que dixe en el num. 3.

5. Eſtas igualaciones que reſultan de la ſubſtitucion ſobredicha, ſe eſcriviràn en la columna de direccion ; y aſsimiſmo las demàs de la primera claſe que no ſirvieron, y todas juntas formaràn la ſegunda claſe de dicha columna; en las quales yà ſe hallarà vna incognita menos que en las de la primera claſe.

6. Para excluir otra incognita, ſe eſcogerà vna de eſtas igualaciones pueſtas en la ſegunda claſe, y ſe deſpejarà, de ſuerte, que vna de las incognitas quede ſola, y ſolamente en la vna parte de la igualacion; y eſta igualacion deſpejada, ſe pondrà en la primera claſe de la columna del retorno, ſobre la igualacion primera ; y el valor de dicha incognita ſe ſubſtituirà en la igualaciones de la ſegunda claſe de direccion que no ſirvieron ; y de las igualaciones que reſultaren, ſe formarà la tercera claſe de la columna de direccion. Eſto miſmo ſe continuarà haſta que yà no aya mas incognitas que deſpejar, ò ſe ayan acabado las igualaciones.

7. No aviendo yà mas igualaciones que correr, ſe vendrà a la columna del retorno; y empezando por la primera igualacion que eſtà ſobre las demas, ſe deſpejarà ſi fuere meneſter; y el valor de la incognita ſe ſubſtituirà en la igualacion

lacion ſiguiente, y en las demàs en donde ſe hallare dicha incognita; y las reſultas formaràn la ſegunda claſe del retorno, cuidando ſe eſcrivan eſtas igualaciones con el miſmo orden que las primeras, con lo que ſe concluirà eſta columna; y de eſta reſultarà otra, que llamarèmos *columna final*, en quien ſe contendràn los valores de las magnitudes incognitas, con que quedarà ſatisfecha la queſtion.

8. Todas las magnitudes incognitas, que deſpues de eſtas operaciones quedaren ſin poderſe deſpejar, ſeran arbitrarias; y por ellas ſe podrà ſubſtituir la cantidad que ſe quiſiere; y en eſte caſo las queſtiones ſe llaman, *indeterminadas*, de que hablarèmos en ſu lugar. Eſtos preceptos ſe haran muy faciles con los exemplos que ofrecen las queſtiones ſiguientes.

QUESTION XXX.

Hallar quatro numeros con eſtas condiciones: 1. que la ſuma de los tres primeros ſea 6. 2. que la ſuma de los dos primeros, y el quarto ſea 7. 3. que el primero, tercero, y quarto ſumen 8. 4. que el ſegundo, tercero, y quarto hagan 9.

SEa el primero x. el ſegundo y. el tercero z. y el quarto v. y ſe expreſſarà la queſtion con las igualaciones ſiguientes.

$$x + y + z = 6.$$
$$x + y + v = 7.$$
$$x + z + v = 8.$$
$$y + z + v = 9.$$

Eſtas igualaciones ſe pondràn en la primera claſe de la columna de direccion, ſiguiendo las *Reglas* 1. y 2. ſobredichas, como ſe vè mas abaxo.

Hago aora eleccion de vna de eſtas igualaciones à fin de deſpejar vna de las incognitas: eſcojo, pues, la primera, que es, $x + y + z = 6$. y hecha la reduccion por Antitheſi, es $x = 6 - y - z$. Eſcrivo eſta igualacion en la pri-

primera claſe de la columna del retorno, ſiguiendo la *Regla* 3.

Subſtituyo el valor de x. que es $6 - y - z$. en lugar de x. no en la igualacion $x + y + z$. de que hize eleccion para la reduccion; ſi en las demàs igualaciones donde ſe halla la x. y hecha la ſubſtitucion, y aviendo quitado lo ſuperfluo, tengo eſtas dos igualaciones $v - z \propto 1$. $v - y \propto 2$. ſegun la *Regla* 4.

Eſtas dos igualaciones, como tambien la igualacion $y + z + v \propto 9$. que aun no ha ſervido, las eſcrivo en la ſegunda claſe de la columna de direccion (*ſegun la Regla* 5.) con que eſta ſegunda claſe conſiſte en las tres igualaciones ſiguientes.

$$v - z \propto 1.$$
$$v - y \propto 2.$$
$$y + z + v \propto 9.$$

Para excluir aora otra incognita, ſe ha de hazer en eſta ſegunda claſe lo miſmo que en la primera: elijo, pues, arbitrariamente vna de ſus igualaciones, y ſea $v - z \propto 1$. y hecha la reduccion por Antitheſi, tengo $v \propto 1 + z$. Eſcrivo eſta igualacion en la primera claſe de la columna de retorno, inmediatamente ſobre la igualacion que antes ſe eſcriviò en ella. Subſtituyo el valor $1 + z$. en lugar de v. en todas las igualaciones de la claſe ſegunda de direccion, menos en la que ſirviò para la reduccion; y quitado lo inutil, tengo en virtud de la ſubſtitucion eſtas dos igualaciones para la tercera claſe de direccion, ſegun la *Regla* 6.

$$z - y \propto 1.$$
$$y + 2z \propto 8.$$

Si en la ſegunda claſe huviere otras igualaciones, donde por no hallarſe la v. no huvieren ſervido para la ſubſtitucion, ſe transladarian tambien à la tercera claſe ſobredicha.

Proſigo aora con el miſmo eſtilo, y para reſolver eſtas dos igualaciones, hago eleccion de la primera, y deſpejada es $z \propto 1 + y$. que eſcrivo en la primera claſe de la co-

lumna del retorno ſobre las otras que antes alli ſe eſcrivieron; y ſubſtituyendo el valor $1 + y$. en lugar de z. en la ſegunda igualacion de la tercera claſe de la columna de direccion, tengo $3y \backsim 6$. Reduzgo eſta igualacion, y es $y \backsim 2$. que eſcrivo en la primera claſe de la columna del retorno, ſobre las demàs que ay alli; y como no aya mas igualaciones que correr en eſta queſtion, queda concluida la columna de direccion.

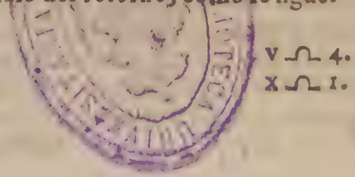
Concluida dicha columna, paſſo à la del retorno, ſiguiendo la *Regla* 7. cuya primera claſe es la ſiguiente.

$$y \backsim 2.$$
$$z \backsim 1 + y.$$
$$v \backsim 1 + z.$$
$$x \backsim 6 - y - z.$$

Para reſolver eſtas igualaciones, empiezo por la primera, y como eſta yà ſe halle reſuelta, no ay en ella mas que hazer, ſi que ſe paſſara à la columna final, en la qual ſe diſpondràn las letras que al principio ſe ſupuſieron por las incognitas, con el miſmo orden que ſe les diò entonces. En conſequencia de lo dicho, ſubſtituyo 2. valor de y. en todas las demàs igualaciones de eſta primera claſe, y ſaldràn otras igualaciones, que junto con las que no huvieren ſervido, haràn la ſegunda claſe de la columna del retorno, que es la ſiguiente.

$$z \backsim 3.$$
$$v \backsim 1 + z.$$
$$x \backsim 4 - z.$$

Hago en eſta ſegunda claſe lo miſmo que en la primera; eſto es, pongo $z \backsim 3$. en la columna final; y ſubſtituyo 3. en lugar de z. en las otras igualaciones, y ſale la tercera claſe del retorno, como ſe ſigue.



$$v \backsim 4.$$
$$x \backsim 1.$$

En

En esta avia de obrar lo mismo que en las antecedentes; pero por no ser menester, traslado estas dos igualaciones à la columna final, que es

$x = 1.$
$y = 2.$
$z = 3.$
$v = 4.$

Y queda resuelta la question, porque los numeros que se piden, son 1.2.3.4. El orden de las columnas de direccion, y retorno es el siguiente.

Columna de direccion.

Clase 1.

$x + y + z = 6.$
$x + y + v = 7.$
$x + z + v = 8.$
$y + z + v = 9.$

Clase 2.

$v - z = 1.$
$v - y = 2.$
$y + z + v = 9.$

Clase 3.

$z - y = 1.$
$y + 2z = 8.$

Columna del retorno.

Clase 1.

$y = 2.$
$z = 1. + y.$
$v = 1. + z.$
$x = 6. - y - z.$

Clase 2.

$z = 3.$
$v = 1 + z.$
$x = 4 - z.$

Clase 3.

$v = 4.$
$x = 1.$

Columna final.

$x = 1.$
$y = 2.$
$z = 3.$
$v = 4.$

Esta Methodo, aunque parece algo prolixa; pero con ella se procede con gran claridad, y sin perturbacion en las substituciones, aunque sean muchas las igualaciones, que requiere la question; y aun se podràn escusar casi siempre la segunda, y terceras clases

 del

del retorno; porque si bien se considera, de sola la primera clase se saca con brevedad la columna final, y la resolucion de la propuesta.

QVESTION XXXI.

Pidense tres numeros, x. y. z. tales, que el primero, y segundo hagan 5. el primero, y tercero hagan 6. el segundo, y tercero hagan 7. el segundo, y tercero con el duplo del primero hagan 11. y el primero, y segundo con el duplo del tercero hagan 13.

LA question con todas sus condiciones, se vè expressada en la clase 1. de la columna de direccion siguiente.

Clase 1.	Clase 1.
$x + y \frown 5.$	
$x + z \frown 6.$	
$y + z \frown 7.$	$y \frown 7 - z.$
$y + z + 2x \frown 11.$	$z \frown 4.$
$x + y + 2z \frown 13.$	$x \frown 5 - y.$
Clase 2.	Clase 2.
$z - y \frown 1.$	
$z - y \frown 1.$	
$2z \frown 8.$	
$y + z \frown 7.$	

$x \frown 2.$
$y \frown 3.$
$z \frown 4.$

Despejando la primera igualacion, resulta $x \frown 5 - y.$ y substituyendo $5 - y.$ en lugar de x. en las otras igualaciones, sale la segunda clase de direccion; y reduciendo para mayor facilidad $2z \frown 8.$ sale $z \frown 4.$ que escrivo en la columna del retorno, y substituyendo 4. en lugar de z. en las otras igualaciones de la segunda clase de direccion, queda concluida la del retorno, de que se infiere con suma facilidad la columna final; y son los tres numeros que se piden.

En

En la resolucion de esta question se ha visto, que quando ay mas igualaciones que incognitas, suele dàr la substitucion vn mismo valor à vna misma incognita en diferentes reducciones; y assi, substituyendo 4. en lugar de z. assi en la igualacion $y \propto 7 - z$. *como en* $y \propto z - 1$. *sale siempre* $y \propto 3$. *y al contrario, quando las igualaciones de vna question fueren menos que las magnitudes incognitas, quedan alguna, ò algunas de estas sin poderse despejar, y es la question indeterminada; de suerte, que tiene infinitas respuestas, como despues veremos. Substituyendo el valor de* x. *que es* $5 - y$ *en las igualaciones segunda, y quarta de la primera clase de direccion, resultan las dos primeras de la segunda clase, que son vna misma cosa* $z - y \propto 1$. $z - y \propto 1$. *por ser la propuesta redundante.*

QUESTION XXXII.

Hallar tres numeros, tales, que la suma del primero, y segundo exceda al tercero en 20. La suma del segundo, y tercero exceda al primero en 30. Y la suma del primero, y tercero exceda al segundo en 40.

SUpongo sean los tres numeros que se piden s. t. v. y siguiendo el tenor de la question, formo con ellos estas tres igualaciones, que componen la primera clase de la columna de direccion.

$$s + t \propto v + 20.$$
$$t + v \propto s + 30.$$
$$s + v \propto t + 40.$$

Hago eleccion de la primera igualacion, y reduzgo la incognita s. à vnidad, y es $s \propto v + 20 - t$. que escrivo en la columna del retorno. Substituyo este valor de s. en las otras igualaciones de la columna de direccion, y aviendo quitado de ellas lo superfluo, salen las dos siguientes en la segunda clase de la misma columna.

$$2t \propto 50.$$
$$v - t \propto 10.$$

Y reduciendo la t. à vnidad en la primera de estas igualaciones, es $t \propto 25$. que escrivo en la columna del retorno, y substituyendo 25. en lugar de t. en la segunda igua-

la-

lacion $v - - t \propto 10$. ſale $v - - 25 \propto 10$. y por antitheſi $v \propto 35$. que eſcrivo en la columna de retorno. Conocidas yà v. t. queda conocido el valor de ſ. en la miſma columna; y formada la final; ſon, pues, los tres numeros que ſe piden 30. 25. 35.

$s + t \propto v + 20.$	$v \propto 35.$
$t + v \propto s + 30.$	$t \propto 25.$
$s + v \propto t + 40.$	$s \propto v + 20 - - t.$
$2t \propto 50.$	
$v - - t \propto 10.$	
	$s \propto 30.$
	$t \propto 25.$
	$v \propto 35.$

QUESTION XXXIII.

Hallar tres numeros, tales, que el primero con 73. ſea duplo de la ſuma de los otros: el ſegundo con 73. ſea triplo de la ſuma de los otros; y el tercero con 73. ſea quadruplo de la ſuma de los otros.

AViendo ſupueſto ſer x. y. z. los tres numeros que ſe piden, ſe expreſſa la queſtion en las tres igualaciones ſiguientes, que componen la primera claſe de la columna de direccion.

$$x + 73 \propto 2y + 2z.$$
$$y + 73 \propto 3x + 3z.$$
$$z + 73 \propto 4x + 4y.$$

Deſpejada la x. en la primera igualacion, reſulta $x \propto 2y + 2z - - 73$. que eſcrivo en la primera claſe de la columna del retorno; y ſubſtituyendo ſu valor en lugar de x. en las otras dos igualaciones, reſultan las dos ſiguientes, que llenan la ſegunda claſe de la columna de direccion.

$$5y + 9z \propto 292.$$
$$7z + 12y \propto 365.$$

Deſ-

Despejando la primera de estas igualaciones es $5y = 292 - 9z$. que se pone en la columna del retorno: y reduciendo la y. à vnidad, es $y = \frac{292 - 9z}{5}$ Substituyendo este valor en la igualacion $7z + 12y = 365$. y quitado el quebrado, y lo inutil, queda $z = 23$. que se escrivirà en la columna del retorno. Subitituyendo 23. en lugar de z. en las dos igualaciones de dicho retorno, sale su segunda clase: y luego la columna final, como se vè: y son 7. 17. 23. los numeros que se piden.

$x + 73 = 2y + 2z.$	$z = 23.$
$y + 73 = 3x + 3z.$	$5y = 292 - 9z.$
$z + 73 = 4x + 4y.$	$x = 2y + 2z - 73.$
$5y + 9z = 292.$	$5y = 292 - 207.$
$7z + 12y = 365.$	$x = 34 + 46 - 73.$

$$x = 7.$$
$$y = 17.$$
$$z = 23.$$

QUESTION XXXIV.

Hallar tres numeros, que el primero con la semisuma de los demàs haga 24. el segundo con el tercio de los demàs haga 22. el tercero con la sexta parte de los demàs haga 27.

SUpongo, que los tres numeros que se buscan son s. t. v. y las tres condiciones de la question se expressaràn en las tres igualaciones siguientes.

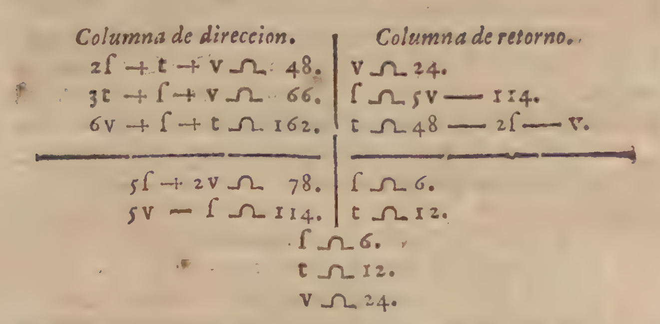
$$s + \frac{t + v}{2} = 24.$$

$$t + \frac{s + v}{3} = 22.$$

$$v + \frac{s + t}{6} = 27.$$

Qui-

Quitados los quebrados, ſalen las tres igualaciones, que componen la primera claſe de la columna de direccion, como aqui ſe vè.



Columna de direccion.	*Columna de retorno.*
2ſ + t + v ∽ 48.	v ∽ 24.
3t + ſ + v ∽ 66.	ſ ∽ 5v — 114.
6v + ſ + t ∽ 162.	t ∽ 48 — 2ſ — v.
5ſ + 2v ∽ 78.	ſ ∽ 6.
5v — ſ ∽ 114.	t ∽ 12.

ſ ∽ 6.
t ∽ 12.
v ∽ 24.

Deſpejando la incognita t. en la primera igualacion, reſulta t ∽ 48 — 2ſ — v. que pongo en la primera claſe de la columna del retorno; y ſubſtituyendo ſu valor en las otras dos igualaciones de la primera claſe de direccion, ſalen las otras dos que ſe vèn en la ſegunda claſe de la miſma columna. Deſpejando la ſ. en la ſegunda igualacion de eſta ſegunda claſe, reſulta ſ ∽ 5v — 114. que eſcrivo en la primera claſe del retorno: y ſubſtituyendo ſu valor en la otra igualacion de la ſegunda claſe de direccion, reſulta v ∽ 24. con que queda deſcifrado el enigma; porque ſubſtituyendo 24. en lugar de v. en la ſegunda igualacion del retorno, ſe halla ſ ∽ 6. Y ſubſtituyendo 6. en lugar de ſ. y 24. en lugar de v. en la tercera igualacion, ſale t ∽ 12. y ſe forma la columna final, donde ſe vè que los numeros que ſe piden ſon 6. 12. 24.

QUESTION XXXV.

Pideſe que el numero 13. ſe divida en tres partes, que ſi la primera ſe multiplica por 16. la ſegunda por 6. y la tercera por 2. los productos eſtèn en continua proporcion quadrupla.

ES lo miſmo que pedir *tres numeros, cuya ſuma ſerà 13. y ſi el primero ſe multiplica por 16. el ſegundo por 6. y el ter-*

tercero por 2. ſalgan tres numeros en proporcion quadrupla.

Sean los tres numeros que ſe piden ſ. t. v. y porque la ſuma de los tres ha de ſer 13. ſerà $ſ + t + v = 13$. multiplicando el primero por 16. el ſegundo por 6. y el tercero por 2. ſon los productos 16ſ. 6t. 2v. y porque el primero es quadruplo del ſegundo, multiplico eſte por 4. y es la igualacion $16ſ = 24t$. aſsimiſmo, porque 6t. es quadruplo de 2v. ſerà la igualacion $6t = 8v$. Eſtas tres igualaciones ſon la primera claſe de la columna de direccion.

$ſ + t + v = 13.$	$v = 3.$
$16ſ = 24t.$	$3t = 4v.$
$6t = 8v.$	$ſ = 13 - t - v.$
$40t + 16v = 208.$	$t = 4.$
$6t = 8v.$	$ſ = 13 - t - v.$

$ſ = 6.$
$t = 4.$
$v = 3.$

Deſpejada la primera igualacion, es $ſ = 13 - t - v$. que ſe pone en la primera claſe de la columna del retorno: el valor de ſ. ſubſtituido en la ſegunda igualacion de la columna de direccion dà $40t + 16v = 208$. que ſe pone en la ſegunda claſe de la miſma columna; y traſladando alli $6t = 8v$. que mas reducida es $3t = 4v$. la eſcrivo en la columna del retorno: y acabando de deſpejar eſta vltima igualacion, es $t = \frac{4v}{3}$: ſubſtituyendo eſte valor de t. en la igualacion $40t + 16v = 208$. ſale $v = 3$. y ſubſtituyendo 3. en lugar de v. en la igualacion ſiguiente, ſale $t = 4$. y ſubſtituyendo 3. en lugar de v. y el 4. en lugar de t. en la igualacion ſiguiente, ſe halla $ſ = 6$. y ſe forma la columna final; ſon, pues, los tres numeros 6. 4. 3.

QUES-

QUESTION XXXVI.

Hallar tres numeros, que ſumados hagan 224. y ſi el primero ſe parte por 4. el ſegundo ſe multiplica por 3. y el tercero ſe parte por 5. ſalga ſiempre vn miſmo numero.

SEan r. ſ. t. los numeros que ſe piden: la primera igualacion es r + ſ + t ∽ 224. El primero, partido por 4. es igual al ſegundo, multiplicado por 3. luego la ſegunda igualacion es $\frac{r}{4}$ ∽ 3ſ. y quitado el quebrado, es r ∽ 12ſ. Tambien el miſmo producto del ſegundo por 3. ha de ſer igual al quociente del tercero, partido por 5. luego la tercera igualacion es $\frac{t}{5}$ ∽ 3ſ. y quitado el quebrado es t ∽ 15ſ. De eſtas tres igualaciones ſe compone la primera claſe de la direccion; y porque la ſegunda, y tercera tienen yà las incognitas deſpejadas, ſe eſcriven en la primera claſe del retorno. Subſtituyo el valor de r. que es 12ſ. en lugar de r. en la primera igualacion de la columna de direccion, y reſulta 13ſ + t ∽ 224. que eſcrivo en ſu ſegunda claſe, juntamente con t ∽ 15ſ. Subſtiyo eſte valor de t. en la igualacion 13ſ + t ∽ 224. y quitado lo ſuperfluo, ſale ſ ∽ 8. Subſtituyo 8. en las demàs igualaciones en lugar de ſ. y queda formada la columna final, y ſatisfecha la pregunta con los numeros 96. 8. 120.

r + ſ + t ∽ 224.	ſ ∽ 8.
r ∽ 12ſ.	t ∽ 15ſ.
t ∽ 15ſ.	r ∽ 12ſ.

13ſ + t ∽ 224.	
t ∽ 15ſ.	

r ∽ 96.
ſ ∽ 8.
t ∽ 120.

QUES-

QUESTION XXXVII.

Tengo dos vaſos de oro, uno mayor, y otro menor; y una cubertera tambien de oro, que vale 90. doblones: el vaſo menor, junto con la cubertera, vale doblado que el vaſo mayor; pero eſte con la cubertera, vale tres tanto como el vaſo menor: pideſe el valor de cada vaſo.

SUpongo que el vaſo mayor vale v. y el menor vale y. añadidos 90. à la y. que es el valor del vaſo menor, ſon y -+ 90. Y porque eſto ha de ſer doblado de lo que vale el vaſo mayor, ſerà la primera igualacion y -+ 90 ⎍ 2v. Añadiendo 90. à la v. que es el vaſo mayor, ſale v -+ 90. que ha de ſer triplo del vaſo menor: con que es la ſegunda igualacion v -+ 90 ⎍ 3y. y eſtas dos igualaciones componen la primera claſe de direccion. Deſpejando la y. en la primera igualacion, reſulta y ⎍ 2v -- 90. Y ſubſtituyendo eſte valor en la ſegunda igualacion, y quitado lo ſuperfluo, ſe halla v ⎍ 72. Y eſtas dos igualaciones componen la primera claſe del retorno; y no es meneſter formar mas claſes; porque ſubſtituyendo 72. en lugar de v. en la otra igualacion del retorno y ⎍ 2v -- 90. ſe halla, quitado lo ſuperfluo, y ⎍ 54. Y queda formada la columna final, donde ſe ve, que el vaſo mayor vale 72. doblones, y el menor 54. y queda ſatisfecha la queſtion.

y -+ 90 ⎍ 2v.	v ⎍ 72.
v -+ 90 ⎍ 3y.	y ⎍ 2v -- 90.

Vaſo mayor v ⎍ 72.
Vaſo menor y ⎍ 54.



CA-

CAPITULO III.

DE LA RESOLUCION DE LAS QUESTIONES ſimples indeterminadas.

DIxe en la Propoſicion 5. del libro 2. que los Problemas ſe dividen en *determinados*, è *indeterminados*. Problemas determinados, ſon aquellos que tienen vna ſolucion tan ſolamente, ò vn cierto, y determinado numero de ſoluciones: indeterminado, el que puede tener infinitas. Un Problema ſerà determinado, quando en èl ſe piden tantas condiciones diſtintas, quantas magnitudes incognitas; y por conſiguiente ſe forman en ſu planteo tantas igualaciones diferentes, quantas concurren incognitas; y tales ſon los que haſta aora ſe han reſuelto. Un Problema ſerà indeterminado, quando ſon menos las condiciones que pide, que las incognitas que concurren, por lo qual llaman algunos à eſtos Problemas *diminutos*. De que ſe ſigue, que las igualaciones que ſe forman en ſu planteo, ſon tambien menos que las incognitas que ſe buſcan: lo que neceſſariamente ocaſiona no poderſe deſpejar por las reglas dadas todas las incognitas.

Sea, pues, regla general: *Quando por qualquiera de las methodos explicadas ſe llegare à terminos, en que alguna, ò algunas magnitudes incognitas no ſe pudieren deſpejar, y conſtituir ſolas en la vna parte de la igualacion, ſerà la queſtion indeterminada, y ſe podrà ſubſtituir arbitrariamente en lugar de cada vna vn numero conocido, y con qualquiera ſe reſolverà la queſtion.*

Pero es meneſter advertir, que eſtas magnitudes arbitrarias tienen muchas vezes ciertos limites, fuera de los quales ſeràn las reſoluciones *negativas*, ò *impoſsibles*. Lo que ſe conocerà facilmente en las miſmas equaciones, donde ſe hallan las incognitas, en cuyo lugar ſe han de ſubſtituir las magnitudes arbitrarias, como ſi reſolviendo vn Proble-

ma

ma no ſe puede hallar mas que eſta igualacion $t = \frac{az}{z-b}$ es evidente, que para tener valores poſitivos de t. la cantidad arbitraria que ſe tomare por z. ha de ſer mayor que b. Aſsimiſmo, ſi la igualacion fuere $r = \frac{4x}{x-8}$ ſe avrà de ſubſtituir por x. qualquiera magnitud mayor que 8. para que ſe pueda reſtar 8. de dicha magnitud. Todo lo dicho ſe verà practicado en las queſtiones indeterminadas ſiguientes, y en las demàs que reſolverèmos mas adelante.

QUESTION XXXVIII.

Hallar quatro numeros tales, que el primero con el duplo del ſegundo ſea triplo del tercero: y el ſegundo con el triplo del tercero ſea quadruplo del quarto.

LOs quatro numeros que ſe piden ſean r. ſ. t. v. Y ſiguiendo la propueſta, ſe haran las dos ſiguientes igualaciones.

$$r + 2s = 3t.$$
$$s + 3t = 4v.$$

Deſpejando la ſ. en la ſegunda igualacion, ſe halla $s = 4v - 3t$. Subſtituyendo eſte valor de ſ. en lugar ſuyo en la primera igualacion, reſulta $r + 8v - 6t. = 3t.$ y por Antitheſi, $r = 9t - 8v.$ con que ſe tienen eſtas dos igualaciones.

$$r = 9t - 8v.$$
$$s = 4v - 3t.$$

Y como yà no ſe puedan deſpejar, ni reducir à vnidad la t. ni la v. ſeran eſtas dos magnitudes arbitrarias; y ſe podra poner en lugar de cada vna de ellas el numero que ſe quiere entero, o quebrado; poſitivo, ò negativo; y en todo caſo quedara ſatisfecha la queſtion: como por exemplo, ſi ſupongo que t. ſea 10. y que v. ſea 9. ſe ſeguira en virtud de las dos vltimas igualaciones, que r. ſera 18. y la ſ. ſera 6. y ſon los quatro 18. 6. 10. 9. que ſatisfacen la

queſtion. Tambien ſi ſe ſupone otra vez que t. ſea 8. y la v. ſea 7. ſe hallarà que r. es 24. y la ſ. ſerà 4. y ſeran los quatro 16. 4. 8. 7. que tambien ſatisfacen la queſtion.

Pero ſi ſe quiere la reſolucion en numeros poſitivos, el numero ſupueſto por t. *al que ſe ſupuſiere por* v. *ha de tener menor razon que la de* 4. *con* 3. *para que de eſſa ſuerte el producto* 3t. *ſe pueda reſtar del producto* 4v.

QUESTION XXXIX.

Hallar quatro numeros, tales, que la ſuma de los dos primeros ſea igual al tercero, y que ſu diferencia ſea igual al quarto.

SEan los quatro numeros que ſe piden v. x. y. z. y la queſtion ſe expreſſarà en eſtas dos igualaciones.

$$v + x \propto y.$$
$$v - x \propto z.$$

Deſpejando la v. en la ſegunda igualacion, es $v \propto z + x$. Subſtituyendo eſte valor en la primera en lugar de v. ſerà $z + 2x \propto y$. luego $2x \propto y - z$. luego $x \propto \frac{y-z}{2}$ Subſtituyo eſte valor de x. en la igualacion $v \propto z + x$. y hallo $v \propto \frac{y+z}{2}$ con que la columna final ſe compone de las dos igualaciones ſiguientes.

$$v \propto \frac{y+z}{2}$$
$$x \propto \frac{y-z}{2}$$

Y porque las incognitas y. z. no quedan extirpadas, ni reducidas à valor alguno determinado, es la queſtion indeterminada; y aſsi ſubſtituyo en ſu lugar los numeros que quiero, y quedarà reſuelta la queſtion: como, ſuponiendo $y \propto 8$. $z \propto 2$. ſerà $v \propto 5$. y la $x \propto 3$. y los numeros 5. 3. 8. 2. ſatisfaràn la queſtion: aſsimiſmo, ſi tomo

10.

10. en lugar de y. y tomo 6. en lugar de z. hallarè eſta otra reſolucion 8. 2. 10. 6. y lo miſmo en otras qualeſquiera ſupoſiciones.

QUESTION XL.

Cien perſonas; es à ſaber, varones, mugeres, y niños gaſtaron 800. reales; cada varon gaſtò 14. cada muger 9. y cada niño 6. Pideſe, quantos eran los hombres; quantas las mugeres, y quantos los niños.

PAra mayor claridad, ſupongo, que el numero de los varones es v. el de las mugeres ſea m. y el de los niños n. Y porque ſegun la propueſta, todos juntos ſon 100. ſerà la primera igualacion $v + m + n \frown 100$. Y porque ſe ſupone, que los varones gaſtaron 14. reales cada vno, ſerà todo lo que expendieron los varones 14v. aſsimiſmo lo que expendieron las mugeres ſerà 9m. y lo que los niños 6n. Y porque todo el gaſto junto es 800. ſerà la ſegunda igualacion $14v + 9m + 6n \frown 800$. Y eſtas dos igualaciones componen la columna de direccion, como ſe vè mas abaxo.

Reduzgo por Antitheſi la primera igualacion, deſpejando la v. y es $v \frown 100 - m - n$. que pongo en la columna del retorno: Subſtituyo eſte valor de v. en ſu lugar en la ſegunda igualacion 14v + 9m. &c. y reſulta, quitado lo ſuperfluo $5m + 8n \frown 600$. y por Antitheſi $8n \frown 600 - 5m$. y partiendolo todo por 8. es $n \frown 75 - \frac{5m}{8}$ que pongo en la columna del retorno. Donde ſe vè ſer la m. arbitraria; y qualquiera numero que ſe ſuponga por m. ſatisfarà la queſtion, mientras que partido por 8. ſe pueda el quociente reſtar de 75.

Pero porque en eſta queſtion, y otras ſemejantes no cabe dàr la ſolucion en quebrados, ſe ſupondrà por la m. vn numero que ſe pueda partir juſtamente por el denominador 8. y ſe tendrà la ſolucion en enteros: y por quanto eſtas reſpueſtas en enteros tienen ciertos limites, ſi ſe quiſieren dàr todas las que fueren poſsibles, ſe empezaràn à

hazer las ſupoſiciones por el 8. que es el numero menor, que juſtamente ſe puede partir por 8. y luego ſe continuarán, ſuponiendo en lugar de m. todos los numeros multiplices del 8. como ſe van ſiguiendo haſta llegar à termino, en que el valor que dieren al quebrado $\frac{5m}{8}$ no ſe pudiere reſtar de 75. y entonces ſe tendràn todas las reſpueſtas poſſibles en enteros, y con ellas ſe formarà la columna final: en la qual ſe vè tener ſolamente ocho reſpueſtas en enteros el Problema propueſto.

$$v + m + n \frown 100. \quad | \quad n \frown 75 - \frac{5m}{8} -$$
$$14v + 9m + 6n \frown 800. \quad | \quad v \frown 100 - m - n.$$

Columna final.

v ⁀	22.	19.	16.	13.	10.	7.	4.	1.
m ⁀	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.
n ⁀	70.	65.	60.	55.	50.	45.	40.	35.

La prueba es, que en qualquiera de los ocho ternarios, ſe hallarà ſer la ſuma igual à 100. y que multiplicando el numero correſpondiente a v. por 14. el de m. por 9. y el de n. por 6. la ſuma de los productos ſiempre ſerà 800.

ESCHOLIO.

En las reſoluciones halladas ſe vè claramente, que los valores de vna miſma incognita, forman progreſsion Arithmetica: De que ſe ſigue, que aviendo ſacado por la regla ſobredicha, las dos primeras reſoluciones, ò ternarios, ſe hallaràn facilmente todos los demàs, ſolo con ſacar la diferencia de los dos terminos, ò valores de vna miſma incognita: porque añadiendola al termino ſegundo, ſi la progreſsion crece, ſe hallarà el tercero: y ſi la progreſsion decrece, reſtandole del ſegundo, ſe hallarà el tercero; y aſsi de los demàs, haſta llegar al fin de vna de las progreſsiones decreſcentes. Eſta queſtion reſuelve Don Antonio Hugo en ſu Analyſi Geometrica, aunque por otro camino, y advierte, que eſtas progreſsiones guardan vn orden maravilloſo, y es, que en la primera, que es la perteneciente al primer valor que ſe buſca, proceden ſus terminos

por

por la diferencia del segundo al tercero valor de la propuesta: la segunda, que es la perteneciente al segundo valor, procede segun la diferencia del primero, y tercero; y la tercera, por la diferencia del primero, y segundo: Con que sabida la primera respuesta, se sabràn con facilidad las demàs, añadiendo à cada termino continuamente, ò restando la diferencia, ò denominador proprio de su progression.

QUESTION XLI.

30. *Personas gastan* 100. *reales: cada varon* 5. *cada muger* 3. *cada niño* 2. *y cada criado* 1. *Pidese quantos eran los varones, quantas las mugeres, quantos los niños, y quantos los criados.*

SUpongo, que el numero de los varones sea v. el de las mugeres m. el de los niños n. y el de los criados c. Y porque todos juntos son 30. tengo la primera igualacion $v + m + n + c \backsim 30$. Y porque cada varon gasta 5. reales, multiplico v. por 5. y el producto 5v. serà lo que gastan los varones: assimismo lo que gastan las mugeres serà 3m. lo que los niños 2n. y lo que los criados serà 1c. Y porque el gasto de todos juntos es 100. tengo la segunda igualacion $5v + 3m + 2n + 1c \backsim 100$. Escrivo, pues, estas dos igualaciones en la columna de direccion.

Despejando aora por Antithesi la v. en la primera igualacion, resulta $v \backsim 30 - m - n - c$. que escrivo en la columna del retorno. Substituyo este valor de v. en lugar suyo en la segunda igualacion de la columna de direccion; y quitando lo superfluo, y juntamente reduciendo à vnidad la incognita m. resulta $m \backsim 25 - 2c - \frac{3n}{2}$ que pongo en la columna del retorno: y porque no se pueden exterminar ni la n. ni la c. serà la question indeterminada, y se podràn substituir qualesquiera numeros por dichas letras incognitas, mientras que las resultas de estas substituciones se puedan restar de 25. Mas porque seria cosa ridicula dàr en quebrados la respuesta; para dàr todas las que fueren possibles en enteros, se obrarà en la forma siguiente.

$v + m + n + c = 30.$	$m = 25 - 2c - \frac{3n}{2}$
$5v + 3m + 2n + 1c = 100.$	$v = 30 - m - n - c.$

Primeramente en la igualacion $m = 25 - 2c - \frac{3n}{2}$. se ſubſtituirà en lugar de n. qualquiera numero entero, què ſe pueda partir juſtamente por 2. empeçando por el menor, que es el miſmo 2. y valorando ſegun dicha ſubſtitucion el quebrado, ſe hallarà vn valor de m. en la igualacion reſultante, aunque no del todo conocido, por permanecer aun alli la incognita c. Y continuando en ſubſtituir en lugar de la miſma n. los demàs numeros diviſsibles por 2. como ſe vàn ſiguiendo, haſta que el valor del quebrado no ſe pueda reſtar de 25. ſe hallaràn las ocho igualaciones ſiguientes, que dàn ocho valores de m. todos en enteros.

Suposiciones.	*Valores.*
$n = 2.$ dà	$m = 22 - 2c.$
$n = 4.$ dà	$m = 19 - 2c.$
$n = 6.$ dà	$m = 16 - 2c.$
$n = 8.$ dà	$m = 13 - 2c.$
$n = 10.$ dà	$m = 10 - 2c.$
$n = 12.$ dà	$m = 7 - 2c.$
$n = 14.$ dà	$m = 4 - 2c.$
$n = 16.$ dà	$m = 1 - 2c.$

2. De cada vna de eſtas igualaciones ſe ſacaràn muchos valores de m. ſubſtituyendo en lugar de la incognita c. numeros enteros, empeçando de la vnidad, y continuando por ſu orden, haſta que ſu duplo, que ſerà el valor de 2c. ſe pueda reſtar del numero que alli ſe halla. Y porque con eſto quedan conocidas todas las incognitas; y ſe llegan à dar todas las reſpueſtas poſsibles en numeros enteros; para proceder ſin confuſion, ſe diſpondrà la columna final con el orden, y diſpoſicion que ſe vè mas abaxo, y en ella ſe obrarà como ſe ſigue.

3. En eſta columna final ſe eſcriviràn enfrente de la c. todos

todos los numeros que por dicha letra ſe iràn ſubſtituyendo: enfrente de la n. ſe pondrà el numero proprio de la ſupoſicion, que diò la igualacion, en quien ſe van haziendo las ſubſtituciones ſobredichas: en correſpondencia de m. ſe pondràn los valores que van reſultando de las ſubſtituciones de la c. y porque en la ſegunda igualacion del retorno, la incognita v. es ∽ 30 — m — n — c. reſtando de 30. los numeros que ſe huvieren hallado por valor de dichas letras, ſe hallarà el valor de v. y ſeran todas conocidas, como porque en el primero de los valores de m. arriba hallados, que es m ∽ 22 — 2c. Supongo 1. en lugar de c. pondrè 1. al lado de c. en la columna final; y porque à la dicha igualacion correſponde n ∽ 2. pondrè 2. al lado de n. y porque de la ſobredicha ſubſtitucion de 1. en lugar de c. reſulta m ∽ 20. eſcrivirè 20. al lado de m. en la columna final; y vltimamente, reſtando de 30. la ſuma 23. que lo es de los tres valores hallados, ſale v ∽ 7. que eſcrivo à ſu lado; y tengo la primera reſpueſta en los quatro numeros 7. 20. 2. 1. eſto es, que los varones pueden ſer 7. las mugeres 20. los niños 2. y los criados 1. De eſta miſma ſuerte ſe hallaràn todas las demàs reſpueſtas, que ſeràn las 40. ſiguientes, ſin que ſean poſsibles otras en enteros.

Columna final.

Por n ∽ 2. m ∽ 22 — 2c.

v ∽	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
m ∽	20.	18.	16.	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.
n ∽	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.
c ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Por n ∽ 4. m ∽ 19 — 2c.

v ∽	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
m ∽	17.	15.	13.	11.	9.	7.	5.	3.	1.
n ∽	4.	4.	4.	4.	4.	4.	4.	4.	4.
c ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

Por n ∽ 6. m ∽ 16 — 2c.

v ∽	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
m ∽	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.
n ∽	6.	6.	6.	6.	6.	6.	6.
c ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Por n ⊓ 8. m ⊓ 13 — 2c.

v ⊓ 10. 11. 12. 13. 14. 15.
m ⊓ 11. 9. 7. 5. 3. 1.
n ⊓ 8. 8. 8. 8. 8. 8.
c ⊓ 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Por n ⊓ 10. m ⊓ 10 — 2c.

v ⊓ 11. 12. 13. 14.
m ⊓ 8. 6. 4. 2.
n ⊓ 10. 10. 10. 10.
c ⊓ 1. 2. 3. 4.

Por n ⊓ 12. m ⊓ 7 — 2c.

v ⊓ 12. 13. 14.
m ⊓ 5. 3. 1.
n ⊓ 12. 12. 12.
c ⊓ 1. 2. 3.

Por n ⊓ 14. m ⊓ 4 — 2c.

v ⊓ 13.
m ⊓ 2.
n ⊓ 14.
c ⊓ 1.

Aqui ſe vè, como en la queſtion antecedente, que aviendo hallado las dos primeras reſpueſtas, ò quaternarios, eſtàn ſabidas las demàs, ſin mas trabajo que continuando las progreſsiones, como allì ſe dixo: y porque la reſolucion de ſemejantes queſtiones puede aprovechar en muchos caſos, no eſcuſo añadir los exemplos ſiguientes.

QUESTION XLII.

Cien perſonas gaſtaron 100. doblones; cada varon 3. cada muger 1. cada niño, medio; y cada criado, un ſeptimo: Pideſe en particular el numero de los hombres, de las mugeres, niños, y criados.

SUpongo como antes, que el numero de los varones ſea v. el de las mugeres, m. el de los niños, n. y el de los criados, c. y porque la ſuma de todos es 100. ſerà la primera igualacion v + m + n + c ⊓ 100. y porque cada varon gaſtò 3. doblones; cada muger 1. cada niño me-

medio ; y cada criado , vn ſeptimo ; y todos juntos 100. ſe formarà de eſtas expenſas la ſegunda igualacion , que es $3v + 1m + \frac{n}{2} + \frac{c}{7} \propto 100$. y eſtas dos igualaciones formaràn la columna de direccion. Deſpejando aora por Antitheſi la primera , ſerà $v \propto 100 - m - n - c$. que pongo en la columna del retorno, y ſubſtituyendo eſte valor de v. en la ſegunda igualacion de la columna de direccion, y hecha la tranſpoſicion , reſulta $2m + 3n - \frac{n}{2} + 3c - \frac{c}{7} \propto 200$. y quitando los quebrados, es $28m + 35n + 40c \propto 2800$. y partiendo todo por 28. es $m + \frac{35n}{28} + \frac{40c}{28} \propto 100$. y deſpejando la incognita m. es $m \propto 100 - \frac{35n}{28} - \frac{40c}{28}$ que eſcrivo en la columna del retorno , como aqui ſe ſigue.

$v + m + n + c \propto 100$.	$m \propto 100 - \frac{35n}{28} - \frac{40c}{28}$
$3v + 1m + \frac{n}{2} + \frac{c}{7} \propto 100$.	$v \propto 100 - m - n - c$.

Donde ſe vè ſer la queſtion indeterminada por no poderſe excluir la n. ni la c. con que en lugar de dichas letras ſe podràn ſubſtituir qualeſquiera numeros , mientras que ſean tales, que el valor que dieren à los quebrados, ſe pueda reſtar de 100. Pero para dàr todas las reſpueſtas que en enteros ſon poſsibles , ſe obrarà como en la queſtion paſſada; ſubſtituyendo primeramente en lugar de c. el numero 7. que es el primero, que multiplicado por 40. ſe puede partir juſtamente , y ſin reſta por el 28. y continuando las ſubſtituciones de los multiplices de 7. por ſu orden , ſe hallaràn las nueve igualaciones ſiguientes.

$c \propto 7$.	dà	$m \propto 90 - \frac{35n}{28}$
$c \propto 14$.	dà	$m \propto 80 - \frac{35n}{28}$
$c \propto 21$.	dà	$m \propto 70 - \frac{35n}{28}$

c ∝ 28.

$c = 28$. dà $m = 60 - \frac{35n}{28}$

$c = 35$. dà $m = 50 - \frac{35n}{28}$

$c = 42$. dà $m = 40 - \frac{35n}{28}$

$c = 49$. dà $m = 30 - \frac{35n}{28}$

$c = 56$. dà $m = 20 - \frac{35n}{28}$

$c = 63$. dà $m = 10 - \frac{35n}{28}$

Para acabar de conocer el valor de m. ſe haràn las ſubſtituciones de los enteros en lugar de n. en todas las ſobredichas igualaciones ; y empezando por la primera , ſe ſubſtituirà en ella primeramente el numero 4. que es el menor, que multiplicado por 35. puede partirſe juſtamente por 28. luego ſe continuarà , ſubſtituyendo los demàs multiplices del 4. en la miſma igualacion , haſta que el valor del quebrado no ſe pueda reſtar de 90. y ſe tendràn todas las reſpueſtas que pueden ſalir de dicha primera igualacion : eſto miſmo ſe harà en cada vna de las demàs , y ſe tendràn las 81. reſoluciones ſiguientes , que pongo con el miſmo orden que reſultan de las igualaciones ſobredichas.

Por $c = 7$ $m = 90 - \frac{35n}{28}$

v =	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
m =	85.	80.	75.	70.	65.	60.	55.	50.	45.	40.	35.	30.	25.
n =	4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40.	44.	48.	52.
c =	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.	7.

v =	17.	18.	19.	20.
m =	20.	15.	10.	5.
n =	56.	60.	64.	68.
c =	7.	7.	7.	7.

Por = 14, $m = 80 - \frac{35n}{28}$

v = 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21.

m = 75.

m ⎍ 75.70. 65.60. 55.50. 45.40. 35.30. 25.20.15.10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12.16. 20.24. 28.32. 36.40. 44.48.52.56.60.
c ⎍ 14.14. 14.14. 14.14. 14.14. 14.14. 14.14.14.14.14.

Por c ⎍ 21. m ⎍ 70 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 10, 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22.
m ⎍ 65. 60. 55. 50. 45. 40. 35. 30. 25. 20. 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8, 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. 44. 48. 52.
c ⎍ 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21. 21.

Por c ⎍ 28. m ⎍ 60 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23.
m ⎍ 55. 50. 45. 40. 35. 30. 25. 20. 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. 44.
c ⎍ 28. 28. 28. 28. 28. 28. 28. 28. 28. 28. 28.

Por c ⎍ 35. m ⎍ 50 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24.
m ⎍ 45. 40. 35. 30. 25. 20. 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36.
c ⎍ 35. 35. 35. 35. 35. 35. 35. 35. 35.

Por c ⎍ 42. m ⎍ 40 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.
m ⎍ 35. 30. 25. 20. 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28.
c ⎍ 42. 42. 42. 42. 42. 42. 42.

Por c ⎍ 49. m ⎍ 30 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 22. 23. 24. 25. 26.
m ⎍ 25. 20. 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12. 16. 20.
c ⎍ 49. 49. 49. 49. 49.

Por c ⎍ 56. m ⎍ 20 — $\frac{35n}{28}$

v ⎍ 25. 26. 27.
m ⎍ 15. 10. 5.
n ⎍ 4. 8. 12.
c ⎍ 56. 56. 56.

Por

Por $c \propto 63.$ $\quad m \propto 10 - \frac{35n}{28}$

$v \propto 28.$
$m \propto 5.$
$n \propto 4.$
$c \propto 63.$

QUESTION XLIII.

Quiere vno gaſtar 800. dineros en cien aves de tres eſpecies: vnas valen 14. dineros cada vna: otras 9. y otras 6. dineros. Pideſe, quantas podrà comprar de cada precio.

SUpongo, que el numero de las aves de la primera eſpecie es v. el de la ſegunda es m. y el de la tercera y. Y porque todas ſon 100. es la primera igualacion $v + m + y \propto 100.$ Multiplicando aora cada eſpecie por ſu precio, ſeràn los productos 14v. 9m. 6y. Y porque eſtos han de hazer 800. dineros, es la ſegunda igualacion $14v + 9m + 6y \propto 800.$ Eſtas dos igualaciones expreſſan las condiciones de la queſtion, y componen la columna de direccion: y deſpejando el valor de v. en la primera, ſe halla $v \propto 100 - m - y.$ que ſe eſcrive en la columna del retorno: y ſubſtituyendo eſte valor de v. en la ſegunda igualacion, y deſpejandole de lo ſuperfluo, reſulta la ſegunda igualacion del retorno, que es $y \propto 75 - \frac{5m}{8}$ como ſe ſigue.

$v + m + y \propto 100.$	$y \propto 75 - \frac{5m}{8}$
$14v + 9m + 6y \propto 800.$	$v \propto 100 - m - y.$

Aqui ſe vè claramente ſer eſta planta la miſma, ſin diferencia alguna, que la de la queſtion 40. con que obrando de la miſma manera, ſe hallaràn las miſmas ocho reſpueſtas en enteros, que ſon las ſiguientes.

$v \propto$ 22.	19.	16.	13.	10.	7.	4.	1.
$m \propto$ 8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.
$y \propto$ 70.	65.	60.	55.	50.	45.	40.	35.

De

De eſta miſma ſuerte ſe reſolveràn en enteros innumerables queſtiones ſemejantes; y ſingularmente las de aligacion de muchas eſpecies, como ſon las dos ſiguientes.

QUESTION XXXXIV.

Un Platero tiene tres eſpecies de oro: la primera de 22. quilates; la ſegunda de 21. y la tercera de 18. y quiere componer 40. libras de oro de 20. quilates. Pideſe quanto puede tomar de cada eſpecie para hazer la ſobredicha mixtura, ſin quebrados.

DIxe en el libro 4. de la Arithm. Infer. Prop. 7. num. 4. que quando las eſpecies que ſe han de mezclar fueren mas de dos, ſe puede hazer la mezcla de infinitas maneras diferentes; y para hazer quantas ſe quiſieren, dì en el lugar citado vna regla bien facil, y ordinaria: Lo que ſe pide aora es, ſe ſeñalen todas las mezclas, que ſin quebrados ſe pudieren hazer dentro los limites del numero dado, las quales tienen determinado numero: conſiguefe eſto vſando de la miſma methodo que en las queſtiones antecedentes.

Sea, pues, p. la primera eſpecie de oro, ſ. la ſegunda, y t. la tercera: y porque la ſuma de las tres eſpecies, ha de ſer 40. libras, ſerà la primera igualacion $p + ſ + t \backsim 40$. Y porque la primera eſpecie es de 22. quilates, la ſegunda de 21. y la tercera de 18. y las 40. libras de la mezcla han de ſer de 20. quilates, ſera ſu valor 800. que es el producto de 40. por 20. y ſerà la ſegunda igualacion $22p + 21ſ + 18t \backsim 800$. y eſtas dos igualaciones expreſſan la queſtion en la primera columna.

Deſpejando la incognita p. en la primera igualacion, es $p \backsim 40 - ſ - t$. que ſe eſcrive en la columna ſegunda. Subſtituyendo eſte valor de p. en la ſegunda igualacion de la primera columna, y aviendo quitado lo ſuperfluo, y hecha la reduccion, queda tambien deſpejada la incognita t. en la igualacion reſultante $t \backsim 20 - \frac{ſ}{4}$ que ſe pone en la columna ſegunda, donde ſe vè no poderſe deſpe-

jar

jar la l: y por conſiguiente ſer la queſtion indeterminada, de ſuerte, que ſubſtituyendo por la ſ. qualquiera numero, que partido por 4. ſe pueda reſtar de 20. quedarà ſatisfecha la propueſta; pero para dàr todas las que ſon poſsibles en enteros, ſe ſubſtituirà en lugar de la ſ. el numero 4. que es el menor de los que juſtamente ſe pueden partir por 4. y ſe hallarà el primer valor de la incognita t. y ſubſtituyendo deſpues por ſu orden todos los multiplices de 4. haſta que el valor del quebrado yà no ſe pueda reſtar de 20. ſe tendràn todos ſus valores para el intento: Y ſubſtituyendoles con el miſmo orden en la igualacion p ∽ 40 — ſ — t. ſe tendràn todos los valores de p. y por conſiguiente todas las reſpueſtas en enteros, que ſon ſeis, como aqui ſe vè.

p + ſ + t ∽ 40.	t ∽ 20 — $\frac{ſ}{4}$
22p + 21ſ + 18t ∽ 800.	p ∽ 40 — ſ — t.

Columna final.

p ∽	17.	14.	11.	8.	5.	2.
ſ ∽	4.	8.	12.	16.	20.	24.
t ∽	19.	18.	17.	16.	15.	14.

QUESTION XLV.

Ay azafran que vale 10. reales la onza, canela 8. reales, moſcada 6. pimienta 4. y clavos 3. reales: de eſtas eſpecies ſe ha de hazer vna mezcla en cantidad de 336. onzas, a razon de 7. reales cada onza, ſin que aya quebrados en la mezcla.

SUpongo ſea a. el azafran, c. la canela, m. la moſcada, p. la pimienta, y v. los clavos: y porque la mezcla de todos ha de ſer 336. onzas, ſerà la primera igualacion a + c + m + p, + v ∽ 336. Multiplico aora cada eſpecie por ſu particular valor; y porque la mezcla de todas ha de valer à razon de 7. reales la onza, multiplico las 336. onzas de la mezcla por 7. y ſerà el producto 2352. Con que la ſuma de los productos de cada eſpecie por ſu pro-

proprio valor, ſerà igual à eſte vltimo producto: eſto es, $10a + 8c + 6m + 4p + 3v \frown 2352$. Y eſtas dos igualaciones que ſe han formado, expreſſan la propueſta en la columna de direccion.

Deſpejando la incognita a. en la primera igualacion, hallo ſer $a \frown 336 - c - m - p - v$. que pongo en la columna del retorno; y ſubſtituyendo eſte valor de a. en la ſegunda igualacion $10a + 8c$, &c. reſulta vna otra igualacion, que deſpejada, y reducida por las reglas ordinarias, viene à ſer $c \frown 504 - 2m - 3p - \frac{7v}{2}$ que pongo en la columna del retorno, y queda hecha la planta para la reſolucion como ſe ſigue.

$$a + c + m + p + v \frown 336. \quad \textit{Direccion.}$$
$$10a + 8c + 6m + 4p + 3v \frown 2352.$$
$$c \frown 504 - 2m - 3p - \frac{7v}{2} \qquad \textit{Retorno.}$$
$$a \frown 336 - c - m - p - v.$$

Por no poderſe excluir las tres incognitas m. p. v. es la queſtion indeterminada, y ſubſtituyendo qualeſquiera numeros por dichas letras, ſe podran hallar infinitas reſpueſtas, mientras que los numeros ſubſtituidos, juntamente con el valor que dieren à la incognita c. ſe puedan reſtar de 336. Pero aunque tenga la queſtion infinitas reſpueſtas, las que ſe pueden dàr en enteros tienen cierto numero determinado, que podrà inveſtigar el Analyſta en la forma ſiguiente.

En la primera igualacion del retorno $c \frown 504$. &c. ſe ſubſtituirà para mayor facilidad la vnidad, aſsi en lugar de m. como de p. que es lo menos que ſe puede ſin quebrado. Hecho eſto, ſe ſubſtituirà en lugar de v. vn numero entero, que multiplicado por 7. ſe pueda partir por 2. y ſe hallarà brevemente, que el menor que ſe puede ſubſtituir es 66. por reſultar de eſta ſubſtitucion la a. igual à cero, ò nada. Continùeſe aora la operacion, ſuponiendo el miſmo 66. en lugar de v. y la vnidad en lugar de m. como antes, y mu-

mudando ſolamente el valor de p. ſuponiendo ſea 2. con que ſe hallarà la ſegunda reſpueſta, en que a. ſerà 2. c. 265. m. ſerà 1. la p. ſerà 2. y la v. 66. Y como aqui yà ſe deſcubra, que los valores de a. ſe vàn excediendo en 2. los de c. ſe vàn diſminuyendo en 3. los de p. ſe exceden en 1. y los demàs ſon ſiempre los miſmos, continuando las progreſſiones, ſe hallaran las ſiguientes reſpueſtas, y otras haſta el numero de 90. diferentes.

a ∽	0.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	
c ∽	268.	265.	262.	259.	256.	253.	250.	247.	
m ∽	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
p ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
v ∽	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	

Conſervando otra vez el miſmo 66. por valor de v. y la vnidad ſiempre en lugar de p. y mudando ſolamente el valor de m. en 2. 3. 4. &c. ſe hallaràn las ſiguientes reſpueſtas, y otras por ſu orden haſta 135.

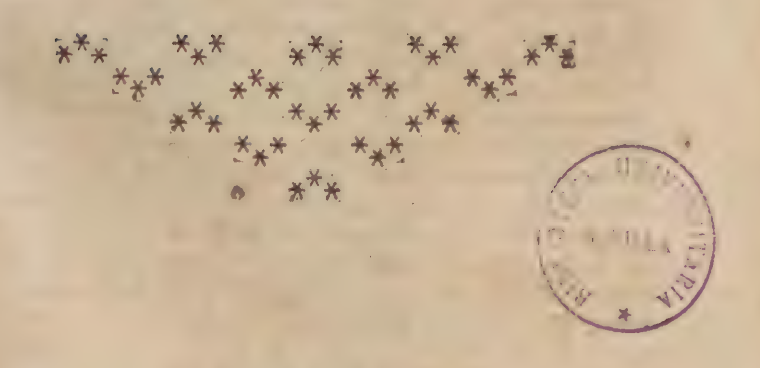
a ∽	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
c ∽	268.	266.	264.	262.	260.	258.	256.	254.	
m ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	&c.
p ∽	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	
v ∽	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	

Suponiendo deſpues el miſmo 66. por v. y que m. ſea ſiempre 2. variando los valores de p. en 1. 2. 3. &c. ſe hallaran las ſiguientes reſpueſtas, y otras haſta 89.

a ∽	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	
c ∽	266.	263.	260.	257.	254.	251.	248.	245.	
m ∽	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	&c.
p ∽	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
v ∽	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	66.	

Suponiendo tambien que el valor de m. ſe vaya variando ſegun la progreſsion 1. 2. 3. &c. y que v. ſea ſiempre 66.

66. y el valor de p. ſea ſiempre 2. ſe hallaràn otras muchas reſpueſtas; y aſsimiſmo, haziendo que m. ſea ſiempre 3. y variando el valor de p. ſegun la progreſsion natural, ſe hallaràn otras muchas; y aſsi ſe podrà ir proſiguiendo, y ſe hallarà, que ſin variar el valor de v. ſon muchiſsimas las ſatisfacciones à la propueſta, y como el valor de v. pueda ir ſubiendo à 68. 70. 72. &c. y en cada ſupoſicion de eſtas ſe puedan hazer en la p. y en la m. las miſmas ſupoſiciones que ſe han hecho ſobre v ⌒ 66. ſe ſigue ſer caſi innumerables las reſpueſtas que ſe pueden dàr à la queſtion en enteros, ſingularmente pudiendoſe ſuponer por v. todos los numeros, que excediendoſe en 2. ſuben deſde 66. haſta 142. que ſegun la regla dada en la Arithm. Infer. lib. 5. Prop. 13. ſon 39. terminos, ò ſupoſiciones diferentes; y como de lo dicho ſe colija facilmente el modo de ſacar las demàs reſpueſtas, no me detengo mas en ello; ni añado mas exemplos, pues de los propueſtos ſe infiere la vniverſalidad de la regla, para reſolver qualeſquiera queſtiones ſemejantes, aunque conſten de muchos mas terminos, ò eſpecies.



LIBRO IV.

DE LA ANALYSI COMPUESTA, en que por particion se resuelven las igualaciones compuestas, quando en ellas concurre solamente vna magnitud incognita.

ANALYSI compuesta, es la resolucion de las igualaciones compuestas, que como en otra parte dixe, son aquellas en que la magnitud incognita tiene diferentes grados. Varios son los modos de resolver estas igualaciones, de los quales explicarè solamente dos; vno que procede por particion, que serà la materia de este libro; y otro que vsa de la substitucion, que serà el empleo del siguiente; y porque la resolucion de estas igualaciones lleva especial dificultad, quando en las igualaciones concurren diferentes incognitas, para vencerla, dedicarè el lib.7. enseñando alli la methodo mas facil que permitiere esta materia, bastantemente dificultosa. Los dos modos de resolver sobredichos, à mas de ser generales, son muy inteligibles, y he juzgado por conveniente poner aqui la explicacion de entrambos, por ser en algunas ocasiones mas facil el vno, y en otras el otro, dexando a discrecion del Analysta vsar en las resoluciones del que mejor le pareciere.

DEFINICIONES.

1 *IGualaciones compuestas, son las que se componen de diferentes grados, ò potestades, à que se halla elevada la magnitud*

nitud incognita. Eſtos diferentes grados pueden ir acompañados, ù de ſola la vnidad, como $1y3. + 1y2. + 1y \propto 12$. ù de otro qualquiera numero, à que llaman *coeficiente*, por producir, multiplicando la poteſtad, vn plano, ò ſolido, como $10y2 + 4y \propto 48$. donde el 10. es *coeficiente* del $y2$. y el 4. de la y.

2. *Terminos de la igualacion ſon aquellos donde ſe halla la incognita elevada à diferentes grados.* De ſuerte, que todas las magnitudes donde la incognita obtiene vn miſmo grado, no ſon mas que vn ſolo termino, y aquel ſe llama, *primer termino*, donde la incognita ſe halla elevada à la poteſtad mas alta. *Segundo termino*, aquel donde la incognita poſſee el grado inmediatamente inferior; y aſsi los demàs: y aquella magnitud donde no ſe halla la incognita, ſe llama, *Homogeneo de la comparacion.*

Exemplos. En eſta igualacion $x3 + 3x2 - 5x \propto 92$. el primer termino es $x3$. el ſegundo $3x2$. y el tercero $5x$. y el 92. es el Homogeneo de la comparacion. En la ſiguiente igualacion, $y3 + ayy + byy - cyy + aby - acy - bcy \propto abc$. ay ſolamente tres terminos: el primero es $y3$. el ſegundo ſon las tres magnitudes ſiguientes, donde ſe halla yy. y las otras tres donde ſe halla la y. ſon el tercero, y abc. el Homogeneo de la comparacion.

Para que ſe diſtingan mejor los terminos, las magnitudes que pertenecen à cada vno, ſe ſuelen eſcrivir vnas ſobre otras, como aqui ſe vè.

$$\begin{array}{llll} & + ayy & + aby. & \\ y3. & + byy & - acy & \propto abc. \\ & - cyy & - bcy. & \end{array}$$

CAPITULO I.

DE LA COMPOSICION, Y FORMACION DE LAS igualaciones compueſtas.

PROP. I. Theorema.

Si dadas dos magnitudes ſe ſupone por cada vna de ellas vna miſma incognita, el produćto de entrambas ſupoſiciones ſerà vna igualacion del ſegundo grado, donde el valor de la incognita ſerà qualquiera de las dichas magnitudes.

SEan las dos magnitudes dadas 2. 3. y ſupongo que x. en diferentes ſupoſiciones ſea igual, yà a la vna, ya a la otra, con que ſean las dos igualaciones ſupueſtas $x \backsim 2$. la vna, y la otra $x \backsim 3$. Y por Antitheſi ſeràn $x - 2 \backsim 0$. $x - 3 \backsim 0$. Digo, que ſi eſtas igualaciones ſe multiplican entre si, el producto $xx - 5x + 6 \backsim 0$. tendrà por raiz juſta, ò valor de la incognita x. tanto al 2. como al 3. y cada vna de eſtas magnitudes reſolverà la igualacion.

Demonſtrac. El produćto ſobredicho reſulta de la multiplicacion de la incognita x. por 2. y por 3. y de la x. por sì miſma; y del 2. y 3. entre si: luego eſte produćto ſe podrà partir juſtamente por x. tanto en ſupoſicion que x. ſea 2. como que ſea 3. luego ſuponiendo por x. qualquiera de eſtos numeros, ſe reſolverà la igualacion.

Eſto ſe vè claramente, porque ſuponiendo que 2. ſea el valor de x. ſera la igualacion ſobredicha lo miſmo que $4 - 10 + 6 \backsim 0$. y ſuponiendo que x. ſea 3. ſera $9 - 15 + 6 \backsim 0$. donde ſe vè, que aſsi el 2. como el 3. ſon raizes juſtas de la miſma igualacion.

Lo miſmo es vſando de letras en lugar de numeros: ſean las magnitudes conocidas a. b. y ſupongo $x - a \backsim 0$. $x - b \backsim 0$. Hecha la multiplicacion, ſerà $xx - xa - xb$
$+ ab$

$+ ab = o$. y ſuponiendo que x. ſea a. ſerà $aa - aa - ab + ab = o$. y aſsimiſmo, ſuponiendo que x. ſea b. ſerà $bb - ab - bb + ab = o$. con que tanto a. como b. pueden ſer el valor de x. ò raiz de la igualacion.

Lo miſmo ſucede aunque las magnitudes dadas ſe ſupongan negativas; como ſi fueren la vna $- 3$. y la otra $+ 2$. y por entrambas ſe ſupone indiferentemente la miſma incognita x. de ſuerte, que ſea $x = - 3$. y $x = 2$. y por Antitheſi $x + 3 = o$. y $x. - 2 = o$. multiplicandolas entre sì, ſerà el producto $xx + x - 6 = o$. el qual tendrà por raiz juſta, ò valor de x. tanto al $- 3$. como al 2. porque ſuponiendo $- 3$. en lugar de x. ſerà la igualacion lo miſmo que $9 - 3 - 6 = o$. y ſuponiendo que x. ſea 2. ſerà $4 + 2 - 6. = o$. donde los terminos ſe deſtruyen vnos à otros.

COROLARIO.

De aqui ſe colige, que las igualaciones de ſegundo grado pueden tener dos raizes, como en efecto las tendràn ſi ſe formaren del modo ſobredicho, las quales pueden ſer, ò iguales, ù deſiguales; y en vno, y otro caſo pueden ſer, ò las dos poſitivas, ò las dos negativas; ò vna poſitiva, y otra negativa.

PROP. II. Theorema.

Dadas tres magnitudes, ſi por cada vna de ellas ſe ſupone vna miſma incognita, el producto de la multiplicacion mutua de las tres ſerà vna igualacion del tercer grado, donde el valor de la incognita ſerà qualquiera de las dichas magnitudes.

SEan dadas tres magnitudes 4. 3. 2. y ſuponiendo ſea $y = 4$. $y = 3$. $y = 2$. ſerà por Antitheſi $y - 4 = o$. $y - 3 = o$. $y - 2 = o$. y multiplicando la primera por la ſegunda, y el producto por la tercera, ſaldrà la ſiguiente igualacion del tercer grado $y3. - 9y2. + 26y - 24 = o$. Digo, pues, que el valor de la incognita y. ò raiz de eſta igualacion puede ſer qualquiera de las cantidades 4. 3. 2. de ſuerte, que qualquiera de ellas ſubſtituida en lugar de la

y. reſuelve la igualacion, por la miſma razon que dixe en la Propoſicion paſſada.

Lo miſmo es vſando de letras en lugar de numeros, como ſi fueren y — a ∽ o. y — b ∽ o. y — c ∽ o: hecha la multiplicacion es el producto la igualacion ſiguiente, y3 — ayy — byy — cyy + aby + acy + bcy — abc ∽ o. que ſe podrà partir juſtamente por y — a ∽ o. por y — b ∽ o. y por y — c ∽ o. y ſuponiendo por y. qualquiera de las letras a.b.c. como por exemplo la a. ſerà a3. — a3. — baa — caa + aba + aca + bca — abc ∽ o. y lo miſmo ſerà ſi ſe ſupone por y. la b. ò la c.

COROLARIO.

DE aqui ſe infiere, que las igualaciones del tercer grado pueden tener tres raizes, ò valores de la incognita, por poderſe formar en la forma dicha; y podràn ſer, ò todas iguales, ò deſiguales; ò parte ſolamente iguales; y en todos eſtos caſos podràn ſer todas poſitivas, ò todas negativas, ò parte poſitivas, y parte negativas.

PROP. III. Theorema.

Dadas quatro magnitudes, ſi por cada vna de ellas ſe ſupone vna miſma incognita, el producto de la multiplicacion continua de las quatro, ſerà vna igualacion del quarto grado, donde el valor de la incognita ſerà qualquiera de las ſobredichas magnitudes.

SEan las quatro magnitudes 5. 4. 3. 2. y ſupongaſe, que ſea y — 5 ∽ o. y — 4 ∽ o. y — 3 ∽ o. y — 2 ∽ o. y multiplicando la primera por la ſegunda, y ſu producto por la tercera, y eſte producto por la quarta, reſultarà eſta igualacion del quarto grado, y4. — 14y3 + 71yy — 154y + 120 ∽ o. que ſe podrà partir juſtamente, y ſin reſta por qualquiera de las quatro igualaciones ſimples arriba dichas, y por conſiguiente, ſuponiendo en lugar de y. qualquiera de los numeros 5. 4. 3. 2. quedara reſuelta la igualacion, por la miſma razon que las antecedentes; y lo miſmo es ſuponiendo letras en lugar de numeros.

CO-

COROLARIOS.

1. **D**E lo dicho en eſtos Theoremas, ſe colige claramente lo miſmo en todas las demàs poteſtades haſta el infinito; ſolo, que para ſu formacion han de entrar tantas magnitudes conocidas, quantas vnidades ay en ſus exponentes, como cinco en la quinta poteſtad, ſeis en la ſexta, &c.

2. Coligeſe tambien el modo de componer, y formar qualeſquiera igualaciones compueſtas, para que tengan tantas raizes efectivas, quantas ay vnidades en ſu exponente, las quales ſe podràn tomar, ò poſitivas, ò negativas ſegun pareciere.

3. Cada igualacion compueſta puede tener tantas raizes, quantos grados tiene la magnitud incognita, ò quantas ay vnidades en el exponente de la poteſtad mas alta, y eſtas ſeràn iguales, ò deſiguales, poſitivas, ò negativas, ſegun fueren las magnitudes que ſe eſcogieron para ſu formacion.

4. De eſte miſmo modo de formar las igualaciones compueſtas, ſe infiere, que el coeficiente del ſegundo termino contiene la ſuma de todas las raizes, ſin multiplicacion de vnas por otras: el coeficiente del tercer termino, contiene todos los productos de las raizes, multiplicadas de dos en dos, tantas vezes, quantas ſon meneſter para formar ſus binarios: el del quarto termino contiene todos los productos de todas las raizes multiplicadas de tres en tres, y tantas vezes, quantas ſon meneſter para hazer ſus ternarios; y aſsi en los demàs terminos; pero el vltimo, que es todo conocido, y ſe llama Homogeneo de la comparacion, es vnicamente el producto de todas las raizes entre sì.

Todo eſto ſe vè claramente quando los exponentes ſon letras, pero quando fueren numeros no ſe pueden diſtinguir en ellos los binarios ſobredichos, por eſtàr todos juntos en vna ſuma; y aſsimiſmo los ternarios, &c. y aun ordinariamente, por ſer muchos de ellos negativos, no les puede expreſſar la ſuma, por ſalir entonces diminuta; pero en todo caſo, el Homogeneo de la comparacion, es el producto de todas las raizes. Veanſe los exemplos ſiguientes.

Segundo grado.

Raìzes.	Raìzes.
$x - 3 \propto 0.$	$y - a \propto 0.$
$x - 2 \propto 0.$	$y - b \propto 0.$

Potestad.	Potestad.
$xx - 5x + 6 \backsim 0.$	$yy \begin{array}{l} -ay \\ -by \end{array} + ab \backsim 0.$

Tercer grado.

Raìzes.	Raìzes.
$x - 4 \backsim 0.$	$x - a \backsim 0.$
$x - 3 \backsim 0.$	$x - b \backsim 0.$
$x - 2 \backsim 0.$	$x - c \backsim 0.$

Potestad.	Potestad.
$x3 - 9xx + 26x - 24 \backsim 0.$	$x3. \begin{array}{l} -axx + abx. \\ -bxx + acx - abc \backsim 0. \\ -cxx + bcx. \end{array}$

En la del segundo grado, cuyos coeficientes son numero, el segundo coeficiente es 5. suma de las dos raizes; y el vltimo termino es 6. producto de las mismas raizes; y en la del mismo grado, cuyos coeficientes son letras, tiene el segundo termino las a. b. suma de las dos raizes; y el homogeneo es ab. producto de las mismas: En la del tercer grado, que consta de numeros, el coeficiente del segundo termino es 9. suma de las tres raizes: el del tercer termino es 26. suma de 12. 8. y 6. que son los productos de las raizes multiplicadas de dos en dos; y el homogeneo 24. es el producto de las tres raizes entre sì. Esto mismo se vè con mas distincion en la del mismo grado, que lleva letras en lugar de numeros, porque en el segundo termino estàn las letras a. b. c. que sirven de coeficientes, sin multiplicarse: en el tercero estàn sus binarios ab. ac. bc. y en el vltimo, el ternario, ò producto de las tres abc.

5. *Si todas las raizes fueren negativas, todos los terminos de la igualacion compuesta son positivos, y llevan el signo +; la razon es, porque siendo negativas, como y $\backsim$ -- 3. puesto su valor en la misma parte de la igualacion con la incognita, llevan el signo +, como y + 3 $\backsim$ 0. con que teniendo todos los terminos de las equaciones simples la señal +, los productos que nazen de su multiplicacion tendràn esse mismo signo.*

6. *Si todas las raizes son positivas, todos los terminos de la igualacion tendràn alternativamente los signos + -; la razon es, por-*

porque el primero lleva necessariamente el signo +, por proceder de la multiplicacion de terminos que llevan signos semejantes: el segundo no contiene otro, que la suma de las raizes, que en las equaciones simples que sirven para esta composicion, llevan todas --: el tercero tiene los productos de los binarios de las raizes, con que llevando estas el mismo signo --, tendràn sus productos +: el quarto tiene los productos de los ternarios, que en fuerça de la multiplicacion han de llevar --, y assi en los demàs: de suerte, que los terminos impares, como tercero, quinto, &c. tienen por coeficiente los productos de las raizes tomadas en numero par, y assi tendràn +: los terminos pares, como segundo, quarto, &c. tienen por coeficiente los productos de las raizes tomadas en numero impar, y assi han de llevar el signo --, segun las leyes de la multiplicacion.

7. *De aqui se colige, que quando todas las raizes son positivas, las señales + --, se siguen alternativamente en la igualacion, quando todas son negativas, todos los terminos llevan el signo +, y quando las señales + -- no se siguen alternativamente, ay en la equacion necessariamente raizes positivas, y negativas, como tambien quando falta algun termino en la equacion, porque no puede destruirse vn termino, sino es por tener signos contrarios + -- los productos que le componen; y estos no pueden tener signos opuestos, sino es aviendo raizes negativas, y positivas; todo lo qual consta de las reglas del multiplicar.*

8. *De los mismos principios se colige, que qualquiera igualacion compuesta, puede tener tantas raizes positivas, quantas vezes se siguen alternativamente los signos opuestos + --: y tantas negativas, quantas vezes se sigue inmediatamente vn mismo signo +, ò vn mismo signo --.*

PROP. IV. Problema.

Explicase otra formacion de las igualaciones compuestas.

A Mas del modo sobredicho de formar las igualaciones compuestas, se puede vsar del siguiente, que solo consiste en escoger qualquiera numero por raiz, y formar sus potestades; y tomando despues las que se quisiere entren en la igualacion, se multiplicarà cada vna por vn coefi-

coeficiente, ſegun pareciere; y ſumando todos los productos, ò reſtando vnos de otros, ſaldrà el homogeneo de la comparacion, y ſe formarà la igualacion.

Para aſſegurar mas el acierto, ſe podrà diſponer vna Tabla con tres columnas, y eſcogiendo vn numero por raiz, como por exemplo 23. ſe pondràn ſus poteſtades en la primera columna: en la ſegunda ſus caracteres, con los coeficientes, ò multiplicadores que ſe quiſieren; y multiplicando cada poteſtad numerica por el coeficiente que le correſponde, ſe pondràn los productos en la tercera columna, y al lado de eſtos los ſignos +, ò —, ſegun pareciere, como aqui ſe vè.

Poteſtades.	*Coeficientes.*	*Productos.*
23.	— 100 z	2300.
529.	+ 400 zz.	211600.
12167.	— 3 z3.	36501.
279841.	+ 1 z4.	279841.

Hecho eſto, ſe ſumaràn los que tienen el ſeñal +, y aſſimiſmo à parte los que llevan --: y reſtando la ſuma de eſtos de la de aquellos, el reſiduo ſerà el homogeneo de la comparacion; como en el exemplo propueſto, la ſuma de los que llevan + es 491441. la del ſigno —, es 38801. la diferencia de + à — es 452640. Con que es la igualacion z4. — 3z3. — 400zz — 100z ⎍ 452640. De eſte modo ſe pueden fabricar innumerables.

COROLARIOS.

1. *EN las igualaciones del ſegundo grado, formadas de eſta manera, el homogeneo de la comparacion, es tambien el producto de dos raizes, ò valores de la incognita, como en las que ſe forman del modo primero. Sirva de exemplo la igualacion* xx + 2x — 24. ⎍ 0. *que ſe ha formado tomando* 4. *por raiz; y à ſu quadrado* 16. *añadiendo* 8. *que es el producto de la raiz* 4. *por el coeficiente* 2. *todo lo qual ſuma* 24. *y por conſiguiente, quitando* 24. *es todo igual à nada. Digo, pues, que eſte homogeneo es producto de la raiz* 4. *por el valor de otra raiz, que es* 6. *ſolo que es ne-*

negativa, por seguirse en la igualacion inmediatamente dos vezes el signo +: lo que se puede probar, suponiendo — 6. en lugar de x.

La razon de esto es, porque el 4. que se tomò por raiz, se multiplica à sì mismo, y juntamente al 2. que es el coeficiente de x. luego con entrambas multiplicaciones multiplica al 6. luego el producto ha de ser 24. que es el homogeneo de la comparacion: y por consiguiente nace esta de la multiplicacion de dos raizes, ò valores de x.

2. En las demàs igualaciones formadas de este segundo modo, raras vezes serà el homogeneo de la comparacion producto de tales numeros, que todos puedan ser raiz justa, ò valor de la incognita, por ser meramente arbitrarios los coeficientes, y no intervenir multiplicacion mutua de diferentes raizes: de que se origina tener las igualaciones compuestas algunas raizes irracionales, ò faltarles algunas de las que segun su grado debian tener.

CAPITULO II.

EXPLICASE LA RESOLUCION DE LAS igualaciones compuestas, por particion.

ESte modo de resolver las igualaciones compuestas es de Monf. Juan Prestet en el tom. 2. de sus Elementos Mathematicos lib. 8. y es correspondiente al modo de componerlas: porque formandose por multiplicacion de la incognita mas, ò menos algunas cantidades, como hemos visto, si este producto, ò igualacion que resulta se parte por la incognita mas, ò menos alguna de las mismas cantidades, ha de venir la particion justa; y se sabrà ser aquella cantidad que sirviò de partidor, el valor de la incognita, y vna raiz de la igualacion: y el quociente sera la otra raiz, ò el producto de las demàs raizes. Todo el trabajo consiste en hallar el partidor, que forzosamente ha de ser à tientas; pero lo facilitaràn las reglas siguientes.

PROP.

PROP. V. Problema.

Reglas generales para reſolver por particion las igualaciones compueſtas.

1. EXamineſe la igualacion propueſta, y veaſe quantas raizes puede tener, y ſi han de ſer poſitivas, ò negativas. (*Corolar. 6. y 7. Prop. 3.*)

2. Por quanto el homogeneo de la comparacion, ò vltimo termino es el producto de las raizes, ò valores de la incognita, es cierto que alguna, ò algunas de ſus partes aliquotas, ò diviſores juſtos ſeràn dichas raizes. Buſquenſe, pues, (18. 1.) todos los diviſores, ò partes aliquotas del homogeneo, y veaſe ſi la magnitud incognita mas, ò menos cada diviſor puede partir juſtamente; y ſin que ſobre nada, la igualacion propueſta, y aquel diviſor que harà juſta dicha diviſion, darà vna raiz de la igualacion, y el quociente ſerà vna igualacion rebaxada à vn grado menos, y ſu homogeneo ſerà el producto de las otras raizes de la igualacion, que ſe hallaràn de la miſma manera; para cuya inveſtigacion, ſolo ſe harà caſo de aquellas partes aliquotas, que lo fueren del homogeneo del quociente.

3. Si ninguna particion viniere juſta, ſerà cierta ſeñal de que la igualacion carece de raiz juſta, y commenſurable. Eſto ſe harà facil con la practica, y exemplos de las Propoſiciones ſiguientes.

PROP. VI. Problema.

Reſolucion de las igualaciones compueſtas de ſegundo grado.

Exemplo 1. Pideſe la reſolucion de la igualacion $yy - 5y + 6 \backsim 0$: Veo ha de tener dos raizes, por llevar la poteſtad mas alta el exponente 2. y que ambas han de ſer poſitivas, por alternarſe los ſignos. Los diviſores del homogeneo ſon 1. 2. 3. 6. Voy aora probando ſi la igualacion dada ſe puede juſtamente partir por $y - 1 \backsim 0$: $y - 2 \backsim 0$: $y - 3 \backsim 0$: $y - 6 \backsim 0$. Y no ay para què intentar las particiones por $y + 2$. ni $y + 3$. &c. por carecer de raiz negativa. Hallando, pues, venir juſta la particion por $y - 2 \backsim 0$. no ay para què paſſar mas adelan-

tes

te ; y digo , que $y - 2 \propto 0$. dà vna raiz juſta , que es $y \propto 2$. y el quociente que ſaliò de dicha diviſion $y - 3 \propto 0$. ſerà la otra raiz , que es $y \propto 3$. y tanto la vna , como la otra reſuelven la igualacion.

Exemplo 2. Sea $yy + 5y + 6 \propto 0$. Pideſe ſu reſolucion. Los diviſores del vltimo termino ſon los miſmos que en la paſſada ; y porque todas las raizes han de ſer negativas, por no aver alternacion de ſignos, intentarè la particion por $y + 2 \propto 0$. por $y + 3 \propto 0$. &c. Y porque hallo venir juſta por $y + 2 \propto 0$. digo , que la vna raiz es -2. y la otra -3.

Exemplo 3. Sea la equacion $yy + y - 6 \propto 0$. Eſta tiene dos raizes : vna poſitiva , por variarſe vna vez los ſignos ; y otra negativa , por ſeguirſe vna vez inmediatamente el miſmo ſigno + : y ſiendo los partidores del vltimo termino 1. 2. 3. 6. he de vèr ſi $y - 2 \propto 0$. ù la $y + 2 \propto 0$. y aſsi de los demàs , parten juſtamente la igualacion ; y porque hallo que viene juſta partiendo por $y - 2 \propto 0$. no es meneſter proſeguir : y es $y \propto 2$. la raiz poſitiva , y el quociente $y + 3 \propto 0$. eſto es , $y \propto -3$. es la raiz negativa.

ADVERTENCIAS.

1. *EN eſtas igualaciones del ſegundo grado , quando todas las raizes ſon poſitivas, ò todas negativas , la raiz mayor ha de ſer mas, y la menor menos, que la mitad del coeficiente de la incognita en el ſegundo termino : como en los exemplos primero, y ſegundo propueſtos, las raizes ſon 2. y 3. la vna mas , y la otra menos que la mitad de 5. coeficiente del ſegundo termino , lo qual puede ſervir en muchos caſos para eſcuſar el trabajo en intentar muchas particiones. Si entrambas raizes fueren iguales, ſerà cada vna la mitad de dicho coeficiente. Quando vna de las raizes fuere poſitiva, y otra negativa, ſi el ſegundo termino llevare el ſigno —, la mayor ſerà poſitiva: y ſi lleva el ſigno + , la raiz mayor ſerà negativa.*

2. *Hallada vna raiz en eſtas igualaciones del ſegundo grado, eſtà ſabida la otra , ò en el miſmo quociente de la particion , como queda dicho ; ò reſtando la raiz hallada del coeficiente del ſegundo termino, ò partiendo por ella el homogeneo: lo qual ſe funda en ſer*

el

el coeficiente del ſegundo termino la ſuma de las dos raizes, y el homogeneo el producto de las miſmas.

3. En eſtas, y en las demàs igualaciones conviene ordenar los terminos, ſi acaſo ſe dieren deſordenados, diſponiendoles, de ſuerte, que el de mas alto grado ſe ponga en primer lugar à la izquierda, y los demàs por ſu orden, tanto, que lleven el ſigno + como el —: y ſi pareciere, ſe podràn variar los ſignos en todos los terminos, ſin perjuizio de la equacion. Sirva de exemplo la igualacion que reſulta de la queſtion ſiguiente.

Pidenſe dos numeros, que ſumados hagan 5. y multiplicados produzgan 6. Por las reglas ordinarias ſea el vno x. y el otro $5 - x$. *multiplicados ſon* $5x - xx \propto 6$. *luego* $5x - xx - 6 \propto 0$. *y pueſto en primer lugar el* $- xx$. *eſtarà la igualacion ordenada* $- xx + 5x - 6 \propto 0$. *donde ſe alternan los ſignos, y ſe vè ha de tener dos raizes poſitivas, lo que no ſe colegiria de la primera diſpoſicion: y ſi pareciere, ſe mudaràn los ſignos en ſus opueſtos, de modo, que ſea* $+ xx - 5x + 6 \propto 0$. *y ſerà la miſma igualacion que la antecedente. La razon es, porque en la forma primera* $5x - xx \propto 6$. *lo miſmo es paſſar el 6. à la otra parte con el ſeñal —, que paſſar el* $5x - xx$. *à la parte del 6. con los ſignos contrarios* $xx - 5x + 6 \propto 0$.

PROP. VII. Problema.

Reſolucion de las igualaciones compueſtas del tercer grado.

EXemplo 1. Pideſe ſe reſuelva la igualacion compueſta $z3 - 9zz + 26z - 24 \propto 0$. y reconociendola ſe halla puede tener tres raizes, todas poſitivas. Los diviſores de 24. ſon 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. y ſupueſto que todas las raizes ſon poſitivas, voy probando ſi la particion de la igualacion viene juſta por $z - 1 \propto 0$. ò por $z - 2 \propto 0$. &c. y hallo partirſe juſtamente por $z - 2 \propto 0$. con que tengo vna raiz $z \propto 2$. Para hallar las otras dos, veo ſi el quociente $zz - 7z + 12$. ſe puede partir juſtamente por $z - 2 \propto 0$. ò por $z - 3 \propto 0$. lo que no llevarà mucho trabajo, ſupueſto que ſe ſabe, que el coeficiente 7. es la ſuma de las raizes que ſe buſcan, y el homogeneo 12. es ſu producto. Hallo, pues, venir juſta la particion por $z - 3$. Con que la ſegunda raiz es $z \propto 3$. y el quociente $z - 4 \propto 0$.

⎍ o. dà la otra z ⎍ 4. y son todas las tres 2. 3. 4.

Exemplo 2. Sea $v^3 - 3vv - 4v + 12$ ⎍ o. Esta igualacion, segun reglas, puede tener tres raizes, dos positivas, y vna negativa. Los divisores del vltimo termino, son 1. 2. 3. 4. 6. 12. y probando las particiones por $v - 1$ ⎍ o. por $v + 1$ ⎍ o. por $v - 2$ ⎍ o. &c. hallo venir justa la particion por $v - 2$ ⎍ o. Luego v ⎍ 2. es vna raiz positiva. El quociente de esta particion $vv - 1v - 6$ ⎍ o. encierra las otras dos, vna positiva, y otra negativa; y probando las particiones como antes, hallo poderse partir justamente dicho quociente por $v + 2$ ⎍ o. y que el segundo quociente, que es $v - 3$ ⎍ o. dà la otra raiz positiva; y son las tres v ⎍ 2. v ⎍ -2. v ⎍ 3.

PROP. VIII. Problema.

Resolucion de las igualaciones compuestas del quarto grado.

Exemplo 1. Sea $y^4 - 10y^3 + 35yy - 50y + 24$ ⎍ o. Esta igualacion puede tener quatro raizes, y todas positivas. Los divisores del vltimo termino son 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. Y porque hallo, que partiendo la igualacion propuesta por $y - 1$ ⎍ o. viene la particion justa, digo, que la primera raiz es $y - 1$ ⎍ o. Esto es, y ⎍ 1. El quociente de la particion es $y^3 - 9yy + 26y - 24$ ⎍ o. y porque veo que este se parte justamente por $y - 2$ ⎍ o. digo ser la segunda raiz y ⎍ 2. El quociente de esta segunda particion es $yy - 7y + 12$. que ha de incluir las dos raizes que faltan; y pues se puede justamente partir por $y - 3$ y el quociente es $y - 4$. digo, que las dos raizes vltimas son $y - 3$ ⎍ o. $y - 4$ ⎍ o. esto es, y ⎍ 3. y ⎍ 4. y son las quatro raizes, ò valores de la incognita 1. 2. 3. 4.

Exemplo 2. Se ha de resolver la igualacion literal siguiente.

$$x^4 \begin{array}{l} \\ -ay^3 \\ -by^3 \\ -cy^3 \\ -dy^3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} +abyy \\ +acyy \\ +adyy \\ +bcyy \\ +bdyy \\ +cdyy \end{array} \begin{array}{l} \\ -abcx \\ -abdx \\ -acdx \\ -bcdx \\ \\ \end{array} + abcd \text{ ⎍ } 0.$$

Esta

Esta igualacion puede tener quatro raizes, y todas positivas, por alternarse los signos en todos los terminos. Los divisores justos del vltimo termino son a. b. c. d. ab. ac. ad. bc. bd. cd. &c. y porque veo, que partiendo la igualacion propuesta por $y - a \backsim o$. viene la particion justa, digo ser la primera raiz $y - a \backsim o$. esto es, $y \backsim a$. El quociente de dicha particion, es el que se sigue.

$$\begin{array}{ll} & -byy + bcy \\ y^3 & -cyy + bdy - bcd \backsim o. \\ & -dyy + cdy \end{array}$$

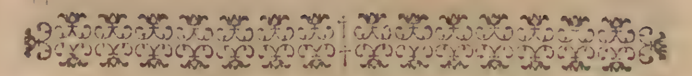
Este quociente incluye las tres raizes que faltan à sacar; y porque hallo, que partiendole por $y - b$ viene la particion justa, digo ser la otra raiz $y - b \backsim o$. esto es, $y \backsim b$. El quociente de esta particion incluye las otras dos raizes, y es el siguiente.

$$yy \begin{array}{l} -dy \\ -cy \end{array} + dc \backsim o.$$

Este se halla partirse justamente por $y - c$. y ser el quociente $y - d$. con que estas son las otras dos raizes. Son, pues, las quatro a. b. c. d. y substituyendo en lugar de ellas las cantidades conocidas, por quienes se subrogaron, se verà satisfacer cada vna de ellas la question.

Exemplo 3. Sea $z^4 - 3z^3 - 1zz + 6z - 2 \backsim o$. Los divisores pueden ser $z + 1 \backsim o$. $z - 1 \backsim o$. $z + 2 \backsim o$. $z - 2 \backsim o$. y porque ninguno de estos dà la particion justa, se concluye no poder tener la igualacion raiz alguna justa, ò racional; pero se podràn aproximar sus raizes irracionales por las reglas que darè mas adelante.

Este modo de resolver las igualaciones compuestas, es muy trabajoso, quando el homogeneo de la comparacion es numero crecido, por ser muchas las partes aliquotas que la pueden justamente dividir. Mas breve, y aun mas ingenioso, es el que procede por substituciones, que explico en el libro siguiente.



LIBRO V.

METHODO DE RESOLVER POR ſubſtitucion las igualaciones compueſtas, quando en ellas ſolamente concurre vna magnitud incognita.

MONS. Rollè, en el Tratado de la Algebra, reſuelve las igualaciones compueſtas de muchos grados por ſubſtituciones diferentes, cuyo artificio en ſuma conſiſte en ſubſtituir, en lugar de la magnitud incognita, diferentes quantidades conocidas, haſta llegar à encontrar con la raiz, ò proprio valor de la incognita. Eſte modo de reſolver es menos trabajoſo que el antecedente; y el Analyſta que en èl ſe huviere exercitado, hallarà gran facilidad en las reſoluciones. Explicarè con la claridad poſsible ſus preceptos en las Propoſiciones ſiguientes de eſte libro, ſin omitir lo que pudiere conducir para la mayor brevedad de las operaciones.

CAPITULO I.

DE LAS SUBSTICIONES.

EN el libro 3. cap. 2. dì las reglas para ſubſtituir vna magnitud en lugar de la incognita en las igualaciones lineares, ò ſimples, donde ella no ſe halla elevada à diferentes poteſtades, ò grados: en el preſente

explico las que ſirven para hazer dichas ſubſtituciones en las igualaciones compueſtas, donde poſſee diferentes grados la magnitud incognita. Propongo dos modos, de los quales, el ſegundo es mas facil, y breve que el primero.

PROP. I. Problema.

Modo primero para ſubſtituir vna magnitud en lugar de vna incognita, que tiene diferentes grados en la igualacion.

PAra ſubſtituir vn numero en lugar de vna magnitud incognita, que obtiene diferentes grados, ſe hallaràn primero todas las poteſtades de el numero que ſe ha de ubſtituir, haſta la mas alta que tiene la incognita: hecho eſto, ſe ſubſtituirà cada poteſtad numerica, en lugar de ſu correſpondiente en la incognita, obſervando en eſta ſubſtitucion las miſmas leyes, que ſe dieron en el lib. 3. cap.2. y ſerà hecha la ſubſtitucion, como ſe vè en los exemplos ſiguientes.

Exemplo 1. En la igualacion $6x^4 - 4x^3 - 3xx + 10x - 14 \frown 0$. ſe ha de ſubſtituir la cantidad + 2. en lugar de x. *Operacion.* El quadrado de 2. es 4. ſu cubo es 8. y ſu quadrado-quadrado es 16. Multipliqueſe 16. por el coeficiente + 6. y es el producto + 96. Multipliqueſe el cubo 8. por el coeficiente -- 4. y es el producto -- 32. Multipliqueſe el quadrado 4. por -- 3. y es el producto -- 12. Multipliqueſe el miſmo 2. por + 10. y es el producto + 20. La ſuma de los productos que llevan el ſeñal +, es + 116. La ſuma de los que llevan el ſeñal -- con el homogeneo -- 14. es -- 58. Sumando + 116. con -- 58. es la ſuma + 58. y queda concluida la ſubſtitucion; y la ſuma + 58. ſe llama *Reſulta* de la ſubſtitucion.

Exemplo 2. En la miſma igualacion $6x^4 - 4x^3 - 3xx + 10x - 14 \frown 0$. ſe ha de ſubſtituir en lugar de x. la cantidad negativa -- 2. *Operacion.* El quadrado de -- 2. es + 4. el cubo es -- 8. el quadrado-quadrado es + 16. Multiplicando + 16. por + 6. coeficiente de x^4. es el producto + 96. Multiplicando -- 8. por -- 4. es el producto

ducto + 32. Multiplicando + 4. por — 3. sale — 12. y multiplicando — 2. por + 10. sale — 20. Los productos que llevan +, suman + 128. Y los que llevan — sumados con el vltimo termino, hazen — 46. Y la suma de todo es + 82. que es la resulta de la substitucion.

Quando la cantidad que se ha de substituir es compuesta, serà la operacion mas larga; pero la regla siempre es la misma, como se vè en el exemplo siguiente.

Exemplo 3. En la misma igualacion sobredicha, se ha de substituir en lugar x. la magnitud compuesta y + 2. *Operacion*. Formense primeramente sus potestades, como se sigue.

Por x.	y + 2.
	y + 2.
	+ 2y + 4.
	yy + 2y.
Por xx.	yy + 4y + 4.
	y + 2.
	+ 2yy + 8y + 8.
	y3. + 4yy + 4y.
Por x3.	y3. + 6yy + 12y + 8.
	y + 2.
	+ 2y3. + 12yy + 24y + 16.
	y4. + 6y3. + 12yy + 8y.
Por x4.	y4. + 8y3. + 24yy + 32y + 16.

Estas potestades se multiplicaràn por los coeficientes que tienen en la igualacion propuesta, y se tendràn sus productos, como se sigue.

Por x^4.	$y^4 + 8y^3 + 24yy + 32y + 16$.
	$+ 6$.
Por $6x^4$.	$6y^4 + 48y^3 + 144yy + 192y + 96$.
Por x^3.	$y^3 + 6yy + 12y + 8$.
	$- 4$.
Por $- 4x^3$.	$- 4y^3 - 24yy - 48y - 32$.
Por xx.	$yy + 4y + 4$.
	$- 3$.
Por $- 3xx$.	$- 3yy - 12y - 12$.
Por x.	$y + 2$.
	$+ 10$.
Por $10x$.	$+ 10y + 20$.

Suma de los productos.

$6y^4 - 48y^3 + 144yy + 192y + 96$.	Por $+ 6x^4$.
$- 4y^3 - 24yy - 48y - 32$.	Por $- 4x^3$.
$- 3yy - 12y - 12$.	Por $- 3xx$.
$+ 10y + 20$.	Por $+ 10x$.
$- 14$.	Por $- 14$.
$6y^4 - 52y^3 + 117yy + 142y + 58$.	

Esta vltima suma es la resulta de la substitucion que se pide.

PROP. II. Problema.

Otro modo de substituir vna magnitud en lugar de la incognita, mas breve que el antecedente.

MUltipliquese la cantidad que se quiere substituir, por el coeficiente del primer termino de la igualacion

lacion: añadaſe à eſte producto el coeficiente del ſegundo termino, y multipliqueſe eſta ſuma por la miſma cantidad que ſe ſubſtituye: añadaſe al producto el coeficiente del tercer termino, y multipliqueſe aſsimiſmo eſta ſuma por la cantidad que ſe ſubſtituye; y de eſta manera ſe continuarà lo miſmo haſta llegar al vltimo termino, que es el homogeneo, el qual ſe ſumarà con el producto antecedente; pero no ſe multiplicarà por la cantidad que ſe ſubſtituye: hecho eſto, quedarà concluìda la ſubſtitucion, cuidando ſiempre de guardar las reglas de los ſignos en las ſumas, y multiplicaciones.

Exemplo 1. Quiero ſubſtituir + 2. en lugar de x. en la igualacion $6x^4. - 4x^3. - 3xx + 10x - 14 \backsim 0$. Multiplico 2. por 6. y al producto 12. añado — 4. y es la ſuma + 8. Multiplico + 8. por 2. y al producto + 16. añado — 3. y es la ſuma + 13. Multiplico + 13. por 2. y al producto + 26. añado + 10. y es la ſuma + 36. Multiplico + 36. por 2. y es el producto + 72. à que añadiendo el vltimo termino — 14. es la ſuma + 58. y eſta es la reſulta de la ſubſtitucion.

Exemplo 2. En la miſma igualacion ſe ha de ſubſtituir — 2. en lugar de x. Multiplico, pues, 6. por — 2. y es el producto — 12. añadidos — 4. es la ſuma — 16. que multiplicada por — 2. produce + 32. ſumando + 32. con — 3. ſalen + 29. que multiplicados por — 2. dàn — 58. que ſumados con + 10. hazen — 48. Multiplicando — 48. por — 2. es el producto + 96. que con — 14. hazen + 82. que es la reſulta de la ſubſtitucion.

Si faltaren algunos terminos intermedios, ſe ſupondrà aver vn zero en lugar de cada vno de ellos, y ſe obrarà ſiguiendo la miſma regla, como en el exemplo ſiguiente.

Exemplo 3. Se ha de ſubſtituir 10. en lugar de z. en la igualacion $z^5. + 5z^3. + 3$. Donde faltan el ſegundo, quarto, y quinto terminos. Multiplico 1. por 10. y es el producto 10. y ſuponiendo que el termino ſegundo, que falta, es cero; ſumo 10. con zero, y ſe queda 10. Multiplicado por 10. es 100. añadiendo el coeficiente + 5. que ſe ſigue, ſon 105. que multiplicados por 10. dàn 1050.

 ſu-

ſumados con zero por el quarto termino que falta, ſon 1050. que multiplicados por 10. dan 10500. los quales ſumados con otro zero por el quinto termino que tambien falta, ſon 10500. multiplicados por 10. es el producto 105000. y añadido el vltimo termino 3. es la reſulta de la ſubſtitucion 105003.

Demonſtr. Eſte modo de ſubſtituir en quanto à lo ſubſtancial, es el miſmo que el antecedente, ſolo que es mas abreviado, lo qual ſe vè claramente, vſando de letras en lugar de los coeficientes conocidos, y de la cantidad que ſe ſubſtituye: Supongo, pues, que en la igualacion $ax^4 - bx^3 - cxx + dx - e = o$. ſe ha de ſubſtituir + f. vſando del modo de la Propoſicion paſſada, es la reſulta de la ſubſtitucion $af^4 - bf^3 - cff + df - e = o$. lo qual tambien reſulta vſando del modo ſegundo en la forma ſiguiente: Multiplicando a. por f. es el producto af. añadiendole — b. es af — b. que multiplicado por f. dà aff — fb. y añadiendole — c. es aff — bf — c. lo qual multiplicado por f. dà $af^3 - bff - cf$. y añadido + d. es $af^3 - bff - cf + d$. que multiplicado por f. y añadiendo al producto el homogeneo — e. es la reſulta $af^4 - bf^3 - cff + df - e$. como ſaliò por el modo primero.

PROP. III. Problema.

Subſtituir vna quantidad en lugar de vna poteſtad de la incognita.

SEa dada la compoſicion ſiguiente $az^5 + bz^4 + cz^3 + dzz + pz + q$. y trabajando en ſu reſolucion, ſupongo ſe hallò $zz = e$. y quiero ſubſtituir e. en lugar de zz. en la compoſicion ſobredicha. Puedeſe hazer eſta ſubſtitucion de muchas maneras; pero vna de las mas faciles es la ſiguiente.

Partaſe la cantidad compueſta ſobredicha por zz. [que es la poteſtad en cuyo lugar ſe ha de ſubſtituir la e.] y aquellas cantidades que no ſe pudieren exactamente partir por zz. eſcrivanſe a parte: multipliqueſe el quociente por e. partaſe otra vez eſte quociente por zz. y ponganſe tam-

tambien à parte las cantidades que no se pudieren exactamente partir: multipliquese el quociente por e. y continùese esta misma operacion, hasta que la particion no pueda hazerse sin que aya resta. Hecho esto, la suma de las cantidades que se escrivieron à parte, serà la resulta de la substitucion. El calculo es como se sigue: La cantidad compuesta, en donde se ha de hazer la substitucion de e. en lugar de zz. es az5 + bz4 + cz3. + dzz + pz + q. Esto se ha de partir por zz. escrivo, pues, à parte pz + q. por no poderse partir por zz. y quedarà az5. + bz4. + cz3. + dzz. Parto esta cantidad por zz. y es el quociente az3. + bzz + cz + d. multiplico este quociente por e. y es el producto eaz3. + ebzz + ecz + ed.

Quito de este producto la cantidad ecz + ed. que no se puede partir por zz. y la escrivo à parte; y al remanente eaz3 + ebzz. le parto por zz. y es el quociente eaz + eb. multiplico este quociente por e. y es el producto eeaz + eeb. que no se puede partir por zz. y assi le escrivo à parte: Y las tres cantidades sumadas, que se pusieron à parte, son la resulta de la substitucion, como aqui se vèn: pz + q + ecz + ed + eeaz + eeb. La razon es clara, porque partiendo por zz. se quita esta magnitud del producto compuesto; y multiplicando el quociente por e. queda substituida la e. en lugar de la potestad zz.

pz + q.
ecz + ed.
eeaz + eeb.

CAPITULO II.

DE LAS HYPOTHESES, Y DEL USO DE ellas para hallar el valor de la magnitud incognita.

DEFINICIONES.

1. *Hypotheses se llaman unos numeros de que se haze eleccion para hallar el valor de la magnitud incognita, subs-*

substituyendoles en lugar suyo en las igualaciones compuestas. Para este efecto suelen elegirse dos hypotheses, la vna ciertamente mayor, y la otra menor que la raiz, ò valor de la incognita que se busca, y se llaman, *hypotheses estremas*: con estas se van hallando otras, como luego veremos, que por estàr contenidas entre ellas, se llaman, *hypotheses medias.* El modo de hallar vnas, y otras, se dirà despues.

2. Siempre que en las Reglas de las Proposiciones siguientes se mandàra tomar la *primera mitad acomodable* de vn numero, se entenderà averse de tomar la mitad del primer caracter de dicho numero, ò su proxima menor, ò mayor, sin hazer jamàs quebrado; pero añadiendole tantos ceros, como se siguen caracteres en dicho numero despues del primer caracter; y esto serà la primera mitad acomodable: como por exemplo 4000. es la primera mitad acomodable del numero 8753. Tambien el mismo 4000. es la primera mitad acomodable de 9708. Y tambien si pareciere, se podra tomar 5000. por la primera mitad acomodable del mismo numero 9708.

3. Por la *segunda mitad acomodable*, se entiende la mitad de los dos primeros caracteres, ò su proxima menor, ò mayor, con tantos ceros, como se siguen cifras à los dos caracteres primeros, y assi de las demas: como si el numero propuesto es 8642. su primera mitad acomodable es 4000. la segunda es 4300. la tercera 4320. y la quarta 4321. El tomar las mitades de los numeros en esta forma, conduce mucho para la brevedad de las operaciones.

ADVERTENCIAS.

1. ANtes de entrar en la explicacion del vso de las hypotheses, advierto lo primero, que todos los terminos de la igualacion se han de colocar por su orden en el primer miembro, en la forma que dixe en el capitulo passado: y à mas de esto se han de disponer las igualaciones con algunas otras operaciones, que explicarè en el siguiente; las quales ya supondrè tener las igualaciones que en este han de servir de exemplos.

2. Siempre que se substituye vn numero en la igualacion

en

en lugar de la magnitud incognita, ſi todas ſus partes ſe deſtruyen mutuamente las vnas à las otras, de ſuerte, que la reſulta ſea cero, eſte numero ſubſtituido ſerà vna raiz racional de aquella igualacion: como por exemplo, ſubſtituyendo 2. en lugar de z. en la igualacion $zz - 6z + 8 \propto 0.$ ſe halla $4. - 12. + 8 \propto 0.$ eſto es, $0 \propto 0.$ Y aſsi, el numero 2. es vna raiz racional de la igualacion ſobredicha.

2. Pero ſi la reſulta de la ſubſtitúcion de vn numero, ò hypotheſe, es vn numero poſitivo; eſto es, los numeros poſitivos exceden à los negativos, ſe dirà, que aquella hypotheſe da +: y ſi dicha reſulta fuere numero negativo, ſe dirà dar —. Y ſiempre que vna hypotheſe ſubſtituida diere +, y otra —, ſerà cierto aver entre las dos vna raiz de la igualacion, ſea racional, ò irracional: como ſi los numeros 5. y 8. ſe ſubſtituyen de por sì en lugar de z. en la igualacion $zz - 10z + 21 \propto 0.$ ſe hallarà, que el primero dà $-4.$ eſto es, que la ſuma de los terminos negados excede à los afirmados en 4. y el 8. ſubſtituido dà $+5.$ eſto es, que los afirmados exceden à los negados en 5. de que ſe infiere, que entre 8. y 5. ay vna raiz, ò valor de la incognita z.

3. Si dos hypotheſes, diferenciandoſe ſolamente en la vnidad, ſubſtituidas en la igualacion, dieren la vna +, y la otra —, ſerà evidente ſeñal, que la raiz que entre ellas ſe contiene es irracional; pero ſe podrà aproximar, ſi pareciere, por las reglas que deſpues darèmos.

PROP. V. Problema.

Explicaſe el modo de vſar de las hypotheſes, para hallar el valor de vna magnitud incognita, en las igualaciones compueſtas.

LAS dos hypotheſes, por aora ſupueſtas, pero que ſe hallan por las reglas que deſpues dirè, ſe ſumaràn; y de la ſuma ſe tomarà la primera mitad acomodable; y eſta ſerà vna nueva hypotheſe, que ſe ſubſtituirà (2.) en lugar de la incognita en la igualacion, y ſe notarà à parte ſi dà

+,

+, ò si dà -- en su resulta. Despues se sumaràn las dos hypotheses menos distantes entre si, que huvieren dado en sus resultas signos diferentes; y tomando la primera mitad acomodable de esta suma, se substituirà en la igualacion, notando tambien si su resulta es +, ò --; y se continuarà lo mismo hasta llegar à encontrar con vna hypothesi, que su resulta sea igual à zero, ò hasta que las dos vltimas hypotheses, dando diferentes signos, solo se diferencien en la vnidad; y en el primer caso la hypothesi vltima, serà vna raiz de la igualacion, ò valor de la incognita; pero en el segundo serà la raiz irracional, como queda dicho.

Advierto, que en aviendo servido vna mitad acomodable, yà no se ha de tomar otra vez por hypothese; si que se tomarà la segunda mitad, si lo pidiere el caso. Quan facil sea lo dicho, se verà en los siguientes exemplos.

Exemplo 1. Sea la igualacion xx -- 1532x + 184800 ∽ 0. cuya raìz se ha de investigar; y supongo sean las hypotheses estremas zero, y 1000. *Operacion.* Substituyendo la primera (2.) hallo ser su resulta +; y quede advertido, que la substitucion del zero siempre dà en su resulta el signo del vltimo termino, con que se podrà omitir su substitucion. Substituyendo la hypothesi mayor 1000. se halla ser su resulta --. Escrivo estas hypotheses, y sus resultas en la lista, que voy formando de ellas, assi como vàn saliendo.

Porque las dos hypotheses sobredichas dàn en sus resultas signos opuestos, se suman; y tomo de su suma la primera mitad 500. por hypothese nueva; y substituyendola en lugar de x. hallo que dà --: Sumo el zero que diò + con 500. que diò --, y tomo la primera mitad de esta suma, que es 200. Substituyo 200. en lugar de x. y veo que dà --: y assi, junto la hypothesi 200. con el mismo zero, y tomo su mitad 100. para nueva hypothese; y hecha la subs-

Hypotheses.	*Resultas.*
0.	+
1000.	--
500.	--
200.	--
100.	+
150.	--
120.	+
130.	+
140.	--
135.	--
132.	0.

ſubſtitucion, hallo que dà +: Sumo eſta hypotheſe con la vltima de las que dieron —, que es 200. y es la ſuma 300. cuya primera mitad acomodable es 100. ù 200. y como eſtas yà ſirvieron, tomo 150. que es ſu ſegunda mitad, y hecha la ſubſtitucion hallo que dà —. Sumo 150. con 100. que es el vltimo que diò +, y tomando ſu ſegunda mitad 120. hallo que dà +: y continuando la miſma operacion, hallo vltimamente la hypotheſi 132. cuya ſubſtitucion dà zero: y aſsi, digo ſer 132. vna raiz de la igualacion propueſta, ò vn valor de x.

En eſte exemplo ſe halla el mayor trabajo que en ſemejantes operaciones puede aver; pues no ocurrirà otro que tenga el calculo notablemente mas largo que el ſobredicho; ſolo puede excederle en mayor numero de poteſtades, lo que aumenta muy poco la fatiga de la operacion.

Tambien advierto, que en lugar de tomar las mitades acomodables para hypotheſes en la forma que hemos viſto, ſe pueden tomar otros numeros, ſin guardar el orden referido; pero aunque algunas vezes puede ſer el calculo mas breve, ſerà por lo regular mucho mas prolixo, que procediendo con el ſobredicho orden.

Demonſtracion. No ay duda en que eſtando la raiz que ſe buſca entre dos magnitudes extremas, vna mayor, y otra menor, ſi ſe ſuman entrambas, la mitad de la ſuma, ò ſerà la raiz, ò ſerà vn numero que eſtarà mucho mas proximo a ella: y ſumandole à eſte con otra hypotheſi inmediata mayor, ò menor, ſegun manda la regla, y tomando la mitad de eſta ſuma, nos acercarèmos mucho mas a la raiz: y por conſiguiente, continuando eſtas operaciones vendrèmos ciertamente à dàr en ella.

Exemplo 2. Sea la igualacion $x3 - 82xx + 2040x - 14400 \backsim 0$. y ſe pide vna de ſus raizes. *Operacion.* Las hypotheſes ſupongo ſon zero, y 20. El zero ſubſtituido dà por reſulta —, que es el ſigno del vltimo termino. Subſtituyo aora la otra hypotheſi 20. diziendo [2.] vna vez 20. es 20. que ſumados con — 82. que lleva el ſegundo termino, ſon — 62. y multiplicados eſtos por 20. es el producto — 1240. que ſumados con + 2040. del tercer termino, hazen + 800. y multiplicados por 20. producen 16000. que

que sumados con el vltimo termino -- 14400. es la resultã -+ 1600. con que la hypothesi 20. dà -+.

La suma de las dos hypotheses cero, y 20. es 20. Tomo, pues, su mitad 10. y hago la substitucion en la misma forma, y hallo dàr por resulta --: Sumo las dos hypotheses 20. y 10. que llevan signos opuestos, y de la suma 30. tomo la segunda mitad 15. porque la primera 10. yà sirviò, y haziendo la substitucion, hallo que dà -+: sumo las hypotheses 10. y 15. y de la suma 25. tomo la mitad 12. y hecha la substitucion, veo ser la resulta cero: con que 12. es vn valor de x.

Hypothesis.	
0	—
20	-+
10	—
15	-+
12.	0

Exemplo 3. Sea la igualacion siguiente v4 — 77v3 -+ 2160vv — 25900v -+ 110000 ∽ 0. cuyas hypotheses supongo sean cero, y 24. Pidese se halle con ellas vna raiz. *Operacion.* Sumadas las dos hypotheses, hazen 24. cuya mitad 12. substituida en la igualacion dà por resulta —. La suma de 12. con cero es 12. cuya mitad 6. substituida en la igualacion dà -+: Sumando aora 6. y 12. es la suma 18. cuya mitad 9. substituida dà -+: sumando 9. con 12. es la suma 21. cuya primera mitad 10. substituida, dà por resulta cero. Con que 10. es vna de las raizes de la igualacion dada.

Hypotheses.	
0	-+
24	—
12	—
6	-+
9	-+
10.	0.

Exemplo 4. Sea dada para resolver la igualacion vv — 24v -+ 84 ∽ 0. y las hypotheses sean cero, y 10. Siguiendo la misma regla, serà el calculo, como aqui se ve: donde se reconoce, que las dos vltimas hypotheses, que dàn por resulta signos opuestos, solo se diferencian en la vnidad: de que se concluye, que el valor de la incognita v es mas que 4. y menos que 5. con que es irracional; pero si pareciere se podrà aproximar, por las reglas de la proposicion siguiente.

Hypotheses.	
0	-+
10	—
5	—
2	-+
3	-+
4	-+

PROP.

PROP. VI. Problema.

Aproximar las raizes irracionales de las igualaciones compuestas.

SIempre que haziendo las substituciones de las hypotheses, se hallaren dos, que solo se diferencien en la vnidad; dando en sus resultas signos opuestos, serà señal ser la raiz, que entre ellas se contiene, irracional, de suerte, que no serà expressable con numero alguno, ni entero, ni quebrado; pero se podrà aproximar quanto se quiere por las reglas siguientes, que suponen averse preparado la igualacion con las preparaciones, que luego dirèmos.

1. Al coeficiente del segundo termino de la igualacion, añadanse tantos ceros como pareciere: con advertencia, que quanto mayor numero de ceros se añadiere, tanto mas se aproximarà la raiz: al coeficiente del tercer termino añadanse doblados ceros que al segundo: al del quarto termino, tres tantos como al segundo: al quinto, quatro vezes tantos; y assi à todos los demàs terminos. Como si en la igualacion $v4 - 4v3 + 5vv - 6v + 3 \backsim 0$. quiero añadir al segundo termino dos ceros, el tercero tendra quatro, el quarto tendra seis, y el quinto ocho, y quedara la igualacion como se sigue: $v4 - 400v3 + 50000vv - 6000000v + 300000000 \backsim 0$.

. Si entre medio faltare algun termino, se ha de hazer la cuenta como si estuviera para dàr à los siguientes el numero de zeros competente: como si en la igualacion $v5 - 2v4 + 3v - 5 \backsim 0$. quiero añadir al segundo termino dos ceros, el tercero tendra quatro: el quarto, si estuviera tendria seis: y el quinto tendria ocho: con que al sexto le tocan diez: y al septimo doze: y estos se les han de dar, aunque falten el tercero, y quarto; y quedarà la igualacion en la forma siguiente:

$$v5 - 200v4 + 300000000v - 50000000000 \backsim 0.$$

Lo mismo se ha de hazer aunque falte el segundo termino: como en la igualacion $y5 - 6yy + 4 \backsim 0$. Si se quiere suponer tenga el segundo termino tres zeros; el terce-

cero tendrà ſeis, el quarto ſe ſupondrà tener nueve: el quinto doze: y el ſexto quince: y ſerà

$y5 - 6000000000yy + 400000000000000 \backsim 0.$

2. Añadidos los zeros en la forma dicha, ſe harà la aproximacion ſacando vna raiz por medio de las hypotheſes, en la forma que ſe diò en la Prop. paſſada: eligiendo para empezar la operacion las dos vltimas que ſirvieron en la precedente, y como dixe, ſolo ſe diferenciaban en la vnidad; pero añadiendo à cada vna tantos zeros, como ſe añadieron al coeficiente del ſegundo termino: Eſtas, pues, ſe ſubſtituiràn en la igualacion que ſe formò deſpues de añadidos los zeros, continùando las ſubſtituciones en la forma explicada, haſta encontrar otra vez dos hypotheſes, que con reſultas de ſignos opueſtos ſolo ſe diferencien en la vnidad: cada vna de eſtas ſe pondrà como numerador de vn quebrado, cuyo denominador para entrambas ſerà la vnidad con tantos zeros, como ſe le añadieron al ſegundo termino de la igualacion: y eſtos dos quebrados ſeràn dos valores proximos, ò raizes aproximadas à la verdadera: la vna mayor, y la otra menor. Todo ſe vè claro en el exemplo ſiguiente.

Exemplo. Sea la igualacion $zz - 7z + 11 \backsim 0.$ y procurando ſu reſolucion por las reglas de la Propoſicion paſſada ſe deſcubre aver vn valor de z. entre 4. y 5. que ſolo ſe diferencian en la vnidad: para aproximarnos mas al valor de z. añado los zeros que me parecieren al ſegundo termino, ſupongo ſean dos, con que reſultarà la igualacion $zz - 700z + 110000 \backsim 0.$ y añadiendo a cada hypotheſi de las vltimas, que fueron 4. y 5. dos zeros como al ſegundo termino, ſeràn 400. 500. las nuevas hypotheſes extremas: por cuyo medio, obrando en la forma ordinaria, ſe hallaràn 461. y 462. que pueſtas, como numeradores de quebrados, ſe les darà por comun denominador 100. y ſeràn 461. centeſimas, y 462. centeſimas: y hecha la reduccion à enteros, partiendo el numerador por 100. ſeràn 4. y 61. centeſimas, y 4. 62. centeſimas, entre las quales ay vna raiz de la igualacion dada.

Adviertaſe, que añadidos los zeros en la forma dicha, tanto à

los

los terminos de la igualacion, como à las hypotheses, todas estas darán las mismas resultas en la segunda igualacion que dieron en la primera, antes de añadirles los zeros, con que se puede escusar el trabajo de las substituciones de dichas hypotheses.

CAPITULO III.

DE ALGUNAS OPERACIONES CON QUE se pueden preparar las igualaciones compuestas para su mas facil resolucion.

ANtes de resolver qualquiera igualacion compuesta por la methodo que vamos explicando, conviene se disponga con alguna, ò algunas de las quatro preparaciones contenidas en los siguientes Problemas.

PROP. VII. Problema.

Despejar de quebrados la igualacion.

LA preparacion primera ha de ser despejar la igualacion de quebrados, si acaso les tuviere: lo que se hara por la regla explicada en el lib.2.Prop.3.regla 3.

PROP. VIII. Problema.

Reducir à vnidad el coeficiente del primer termino.

LA segunda preparacion consiste en reducir à vnidad el coeficiente del primer termino, ò potestad mas alta; y aunque esta diligencia regularmente no sea menester, pero las mas vezes es conveniente; y algunas necessaria, como se advertira en su lugar. Digo, pues, que si el coeficiente del primer termino fuere numero, y se quisiere reducir à vnidad, se han de observar las reglas siguientes.

1. Par-

Demonſtracion de la Regla.

LA raiz de la igualacion reducida en eſte vltimo exemplo, ſe ſupone ſer la miſma de la primera; pero multiplicada por 10. numero del primer termino de la propueſta, por convenir aſsi para la reduccion. En conſequencia de eſto, tendrà con la raiz de la igualacion propueſta la razon de 10. con 1. y como los quadrado-quadrados tengan entre sì razon quadruplicada de ſus raizes, tendrà vn quadrado-quadrado de la ſegunda, à vn otro de la primera, razon quadruplicada de la que ay de 10. à 1. luego tendrà la razon de 10000. à 1. y eſtando v4. en la primera igualacion multiplicado por 10. tendrà el vn v4. de la ſegunda con los 10v4. de la primera, la razon de 10000. à 10. ù de 1000. à 1. Eſto ſupueſto, ſi todos los demàs terminos ſe aumentan en la miſma razon de mil à vno, permanecerà la miſma igualdad que antes avia. Que eſto ſea aſsi, ſe prueba.

El ſegundo termino es cubico, cuya raiz en la igualacion ſegunda es decupla de la raiz de la primera, ò como 10. à 1. y teniendo entre sì los cubos razon triplicada de ſus raizes, ſerà vn cubo de la ſegunda igualacion, à vn cubo de la primera, como 1000. à 1. y eſſa miſma razon tendràn los tres de la ſegunda con los tres de la primera: luego ſin añadir nueva multiplicacion del ſegundo termino, ſe aumenta en la miſma razon milecupla, en que ſe aumentò el primer termino.

El tercer termino es quadrado; y teniendo los quadrados razon duplicada de ſus raizes, ſeràn los quadrados de la ſegunda igualacion à los de la primera, como 100. con 1. luego multiplicandoſe aquellos por 10. ſeran reſpecto de los de la primera, como 1000. con 1. El quarto termino ſon raizes, que teniendo las de la ſegunda igualacion con las de la primera, como dixe, razon decupla; multiplicandoſe las de la ſegunda por 100. tendran con las de la primera razon milecupla, ù de 1000. a 1. En el vltimo termino no puede aver duda, porque ſiendo numero abſoluto, y multiplicandoſe en la ſegunda igualacion por 1000. ſe

ſe ha de aumentar en razon milecupla: luego todos los terminos ſe aumentan en eſſa miſma razon, y por conſiguiente en la ſegunda igualacion, deſpues de hecha la reduccion queda intacta la igualdad.

PROP. IX. Problema.

En vna igualacion dada, hazer que ſus raizes poſitivas ſe hagan negativas, y las negativas, poſitivas, antes de conocerlas.

ESto puede aprovechar en alguna ocaſion; y ſe haze con ſuma facilidad; pues ſolo es meneſter mudar el ſigno del ſegundo termino en ſu opueſto: y aſsimiſmo el del quarto, el del ſexto, y el de todos los demas terminos que hazen numero par; y con eſto las raizes de la ſegunda igualacion ſeràn las miſmas que las de la primera, y las que eran negativas, ſeràn poſitivas, y las poſitivas, negativas.

Exemplo 1. Sea la igualacion $yy - 1y - 6 \propto 0$. cuyas raizes ſon $+3. -2.$ mudando el ſigno al ſegundo termino en ſu opueſto, es $yy + 1y - 6 \propto 0$. cuyas raizes ſon $-3. +2.$

Exemplo 2. Sea la igualacion $x^3 + 6xx - 7x - 60 \propto 0$. cuyas raizes ſon $+3. -4. -5.$ y quiero que la poſitiva ſe convierta en negativa, y las negativas en poſitivas antes de conocerlas. Mudo los ſignos del ſegundo, y quarto terminos en ſus opueſtos, y es la igualacion $x^3 - 6xx - 7x + 60 \propto 0$. cuyas raizes ſon $-3. +4. +5.$

La razon de eſto conſiſte en que ſupueſta la mutuacion ſobredicha en las raizes, reſultaria por ſu multiplicacion la mudança de los ſignos en los dichos terminos: luego ſi ſe haze eſta mudança de ſignos en los terminos, provendrà neceſſariamente la mudança de ſignos en las raizes.

Pero ſe ha de advertir, que à las raizes que ſe hallaren en la nueva igualacion, ſe les avràn de variar ſus ſignos, para tener las verdaderas raizes de la primera. Tambien ſe ha de advertir, que aviendoſe hallado las hypotheſes de la primera igualacion, ſe tienen las de la ſegunda, ſolo con mudarles los ſignos en los opueſtos; de que ſe ſigue, que ſi

lás dos hypotheſes eran negativas, con la ſobredicha mudança de la igualacion, ſe hazen poſitivas.

PROP. X. Problema.

Dada vna igualacion, cuyos terminos no alternan los ſignos, hazer que les tengan alternativos.

VEaſe en la igualacion dada, qual de los terminos negativos lleva mayor numero: tomeſe à parte eſte numero ſin ſigno, ni letra, y partaſe por el coeficiente del primer termino: añadaſele à eſte quociente la vnidad, ò otro numero mayor, ſegun pareciere: de eſta ſuma reſteſe vna nueva incognita que no ſe halle en la igualacion propueſta: ſubſtituyaſe eſte reſiduo en dicha igualacion en lugar de la incognita, y reſultarà vna otra igualacion, cuyos ſignos ſeràn alternativos, y ſerà equivalente à la primera; de ſuerte, que aviendo hallado el valor de ſu incognita por las reglas que darèmos, ſe inferirà con gran facilidad el de la incognita primera.

Exemplo 1. Sea la igualacion $10xx + 20x - 80 \propto 0.$ y quiero que los terminos tengan los ſignos alternativos.

Operacion. El numero del termino negativo [que en eſte exemplo es vnico] es 80. partiendole por 10. coeficiente del primero, es el quociente 8. añadiendole la vnidad, es 9. y reſtando de 9. vna incognita v. que no ſe halla en la igualacion propueſta, hago ſupoſicion ſea $9 - v \propto x.$ ſubſtituyo $9 - v.$ en lugar de x. en la igualacion dicha (1.) y reſulta eſta nueva igualacion $10vv - 200v + 910 \propto 0.$ cuyos terminos tienen los ſignos alternativos.

Hechos los ſignos alternativos con eſta preparacion, tiene la igualacion que reſulta, todas ſus raizes poſitivas; y aviendoſe hallado eſtas por las reglas del lib. antecedente, ò por las que luego dare, ſe ſabe el valor de la incognita de la igualacion primera con ſuma facilidad, y ſin la moleſtia de aver de ſubſtituir dos vezes las miſmas cantidades; vna con la ſupoſicion de que ſean poſitivas, y otra ſuponiendolas negativas. Aviendo, pues, hallado las raizes, ò valores de v. en eſta ſegunda igualacion, que ſon 13. 7. como ſe aya ſupueſto ſer $x \propto 9 - v.$ *Se ſabe ya ſer* $x \propto 9 - 13.$

$x \propto 9$

$x = 9 - 7$. esto es $x = -4$. $x = 2$. que son las dos raizes de la igualacion propuesta; vna positiva, y otra negativa, como pide la distribucion de sus signos. Basta por aora esta insinuacion, para que se vea el fin à que encaminan estas operaciones. Fundase la regla dada en las ordinarias leyes de la multiplicacion, de que resulta la distribucion alternativa de los signos, como se echa de vèr en su mismo exercicio.

Exemplo 2. Sea la igualacion $8zz - 5z - 2 = 0$. y se quiere sean sus signos alternativos. *Operacion.* El mayor termino negativo es $-5z$. y sin hazer caso de su signo, ni de su letra, parto 5. por 8. coeficiente del primer termino, y es el quociente 5. ochavos; añadole 1. y tres ochavos, para que no aya quebrado, y seràn 2. resto del 2. vna nueva incognita y. y serà $2 - y$. que supongo sea igual à la incognita z. de la igualacion, y serà $2 - y = z$. substituyo $2 - y$. en la igualacion propuesta; y resulta la igualacion $8yy - 27y + 20 = 0$. cuyos signos son alternativos.

Exemplo 3. Sea $zz - 6z - 5 = 0$. *En esta, y las demàs, cuyo primer termino lleva solamente la vnidad, no es menester partir.* Siguiendo, pues, la regla, al 6. del segundo termino añado 1. y es 7. y quitandole vna incognita v. es $7 - v$. que substituìdo en lugar de z. dà la igualacion $vv - 10v + 2 = 0$. con signos alternativos.

Exemplo 4. Sea $y^3 - yy - 10y - 8 = 0$. El numero mayor de los negativos es 10. añadole 1. y es 11. quitole la incognita v. y es, $y = 11 - v$. Substituyo $11 - v$. en lugar de y. y resulta la igualacion $-v^3 + 34vv - 375v + 1334 = 0$. que alterna los signos.

Si la igualacion propuesta tiene todos sus terminos afirmativos, y no le falta termino alguno, se variarà en el segundo, quarto, sexto, &c. terminos, el señal afirmativo en negativo; y no serà menester cansarse en la regla sobredicha.

Exemplo 5. Sea la igualacion $s^3 + 13ss + 52s + 60 = 0$. Mudense los signos del segundo, quarto, &c. terminos, y resultarà con signos alternativos la igualacion $s^3 - 13ss + 52s - 60 = 0$. y con esto quedaràn [9.] las raizes que antes eran todas negativas, hechas positivas.

Quando en la igualacion propuesta faltaren alguno, ò algunos ter-

terminos intermedios, vsaremos de la misma regla dada, y resultarà vna segunda igualacion, que tendrà todos los terminos sin faltar alguno; y todos tendràn sus signos alternativos.

Exemplo 6. Sea la igualacion $x^4 * - 20xx * + 64 \backsim 0$, en la qual faltan dos terminos, y no tiene alternacion de signo; porque siendo el primero $+$, el segundo que falta, avia de ser $-$; y el tercero, que es $-$, avia de ser $+$: Pidese se hagan sus signos alternativos. *Operacion.* El mayor coeficiente negado es 20. y con la vnidad es 21. y quitandole vna nueva incognita y. supondrè ser $x \backsim 21 - y$. y substituyendo $21 - y$. en lugar de x. en la igualacion dada, (1.) resulta la igualacion $y^4 - 84y^3 + 2626yy - 36204y + 185725 \backsim 0$. Donde no falta termino alguno, y todos alternan sus signos.

Aviendo vna igualacion recibido esta disposicion, ò alternacion de signos, cada raiz efectiva de dicha igualacion tendrà dos hypotheses positivas, que se hallaràn por las reglas que luego darèmos.

CAPITULO IV.

DE LA RESOLUCION DE LAS IGUALAciones compuestas por substitucion de hypotheses.

PAra inteligencia de la Methodo que he de explicar, se supone lo que varias vezes he dicho, que cada igualacion compuesta puede tener tantas raizes, como dimensiones, ò como ay vnidades en el exponente de la potestad mas alta; y porque puede suceder que en algunas igualaciones falten alguna, ò algunas raizes de las que segun regla avia de tener, para mayor distincion, à las raizes que realmente tiene, sean positivas, ò negativas, llamarèmos *Raizes efectivas*; y à las que faltan, *Raizes defectivas, ò deficientes.* El blanco de este Capitulo consiste en hallar todas las raizes efectivas de la igualacion; y determinar

si

si tiene algunas defectivas, para que asi sea total, y perfecta la resolucion. La methodo, consiste principalmente en el modo de hallar las hypotheses que convienen à cada raiz, para que substituyendolas en la igualacion, por las reglas de la Prop. 2. se llegue al conocimiento de las raizes: Todo esto se explica en las Proposiciones siguientes.

PROP. XI. Theorema.

Explicase el numero de las hypotheses, y el orden que guardan entre sì, y con las raizes de la igualacion.

PRimeramente, como advertì al principio del capitulo 2. à cada raiz de la igualacion, corresponden dos hypotheses, vna mayor, y otra menor que dicha raiz; y como en las igualaciones compuestas aya muchas raizes, necessariamente se avràn de buscar muchas hypotheses; esto es, dos para cada raiz; si bien es verdad, que la mayor respecto de la primera raiz, sirve de hypothese menor respecto de la segunda; y assi consecutivamente: à la menor de todas estas hypotheses, que ordinariamente suele ser el zero, llamarèmos, *Hypothese minima*, y à la mayor de todas, *Hypothese maxima*; y à las demas llamarèmos, *Hypotheses medias.*

De aqui se sigue, que en las igualaciones del segundo grado se han de señalar tres hypotheses; y entre la primera, y segunda estarà la primera raiz; y entre la segunda, y tercera, se hallarà la segunda. En las del tercer grado se han de hallar quatro hypotheses; y entre la primera, y segunda se hallarà la primera raiz; entre la segunda, y tercera, la segunda; y entre la tercera, y la quarta, la tercera: y assi en las demas potestades.

Estas hypotheses han de ir alternando los signos de sus resultas; esto es, que si la primera de todas, que es la minima, dà +, la segunda darà —: la tercera +: la quarta —, &c. ò al contrario, supuesto que tenga la igualacion todas sus raizes efectivas; y como segun esta methodo de resolver todas las igualaciones, se ayan de disponer (10.) de

ſuerte, que ſus ſignos ſean alternativos, como luego dirè; ſe ſigue, que ſiendo la reſulta de la hypotheſe minima el miſmo ſigno del vltimo termino de la igualacion, las hypotheſes haran ſus reſultas con el orden ſiguiente.

Las hypotheſes del ſegundo grado.	+ — +.
Las del tercer grado.	— + — +
Las del quarto grado.	+ — + — +, &c.

PROP. XII. Problema.

Hallar las hypotheſes eſtremas en qualquiera igualacion.

PAra hypotheſe minima, ſerà lo mejor tomar ſiempre el cero: la hypotheſe maxima ſe hallarà de eſta manera. Entre los terminos negativos de la igualacion, veaſe qual lleva mayor numero; y ſin hazer caſo de ſu ſigno, ſe partirà eſte numero por el coeficiente del primer termino; el quociente que proviniere de eſta particion, ſe aumentarà con vn numero entero, como ſe quiſiere; y baſtarà ſe le añada la vnidad; y el numero que reſultare, ſerà la hypotheſe maxima de la igualacion, como ſe verà en los exemplos que luego darèmos. Que ſea aſsi, es conſtante, porque aumentado dicho numero, aunque con ſola la vnidad, es forçoſamente mayor que qualquiera raiz de aquella igualacion, ſingularmente aviendo eſta recibido las preparaciones para ſu reſolucion.

PROP. XIII. Problema.

Reglas generales para reſolver ſegun eſta methodo las igualaciones compueſtas.

PRimeramente ſe deſpejarà de quebrados la igualacion (7.) ſi acaſo las tuviere. 2. Se reducirà à vnidad el coeficiente del primer termino (8.) 3. Se diſpondrà de modo, que ſus terminos alternen los ſignos (10.) ſi ya no les tuviere alternativos. Hecho eſto, ſe paſſarà à hallar las hypotheſes, (12.) y con ſu ſubſtitucion las raizes, del modo que preſcriven las reglas ſiguientes.

RE-

REGLA I.

1. MUltipliquenſe todos los terminos de la igualacion, cada vno por ſu proprio exponente; partanſe todos los productos por la incognita; y ſupongaſe, que el agregado de todos los quocientes es igual a cero.

2. Multipliquenſe todos los terminos de eſta nueva igualacion, cada vno por ſu proprio exponente; partanſe todos los productos por el duplo de la incognita; y el agregado de los quocientes ſe ſupondrà igual à cero.

3. Hagaſe lo miſmo en la ſobredicha igualacion, y en todas las que formaren los quocientes, aſsi como vàn reſultando haſta que ſe aya llegado à vna igualacion linear, ù del primer grado, cuidando de partir, como dixe, el producto de la primera operacion ſolamente por la incognita; el de la ſegunda, por el duplo de la incognita; el de la tercera por el triplo; y aſsi conſecutivamente como fueren reſultando.

4. A eſtas igualaciones que vàn reſultando, ſiguiendo eſta regla, llamarèmos, *Reſultantes.* A la del primer grado llamarèmos, *Reſultante primera*; à la del ſegundo, *Reſultante ſegunda*, y aſsi de las demàs.

Exemplo 1. Pideſe la reſolucion total de la igualacion $y^{3} - 57yy + 936y - 3780 \backsim 0$. Eſta por ſer del tercer grado puede tener tres raizes; y por alternar todos los ſignos de ſus terminos, todas ſeràn poſitivas; y pues no ha meneſter preparacion alguna por tener todas las diſpoſiciones que requiere eſta methodo, empiezo ſu reſolucion en la forma ſiguiente. Multiplico cada termino por ſu proprio exponente: eſto es, y^{3}. por 3. El $-57yy$. por 2. el $+936y$. por 1. y el vltimo termino, por cero, que es lo miſmo que omitirle, y ſerà la ſuma de los productos, $3y^{3} - 114yy + 936y$. Partiendo aora eſtos productos por y. reſultarà la igualacion $3yy - 114y + 936 \backsim 0$.

Para hallar otra de inferior grado, hago con eſta vltima la miſma operacion, multiplicando $3yy$. por 2. el $-114y$. por 1. y el vltimo termino por cero; y ſeràn los productos $6yy - 114y$. que partidos por 2y. dàn la igualacion 3y

—57

— 57 ∽ 0. y como eſta ſea yà linear, tengo todas las igualaciones reſultantes, que ſe podràn diſponer, empeçando deſde la vltima, en la forma ſiguiente.

Reſultante 1.	$3y - 57 \backsim 0.$
Reſultante 2.	$3yy - 114y + 936 \backsim 0.$
Principal.	$y^3 - 57yy + 936y - 3780 \backsim 0.$

Hecho eſto, ſe proſeguirà la reſolucion por la regla ſiguiente.

REGLA II.

REſuelvaſe la reſultante primera, hallando el valor de ſu incognita por las reglas ordinarias, el qual, es vnico, por ſer linear dicha igualacion: eſte valor hallado ſervirà de hypotheſe media para la reſultante ſegunda; y hallando (12.) ſus dos hypotheſes eſtremas, ſe hallaràn por ſubſtitucion las dos raizes de eſta igualacion: eſtas ſerviràn de hypotheſes medias para la reſultante tercera; y hallando ſus dos hypotheſes eſtremas, ſe ſabràn ſus quatro hypotheſes; y vſando de cada dos de ellas, ſe ſacaràn (5.) ſus tres raizes, y quedarà hecha la total reſolucion que ſe pretende. La practica ſe vè claramente, continuando el miſmo exemplo propueſto.

La primera reſultante es $3y - 57 \backsim 0$. luego $3y \backsim 57$. luego $y \backsim 19$. con que 19. es la hypotheſe media de la igualacion ſiguiente, ò reſultante ſegunda; ſus hypotheſes eſtremas ſon zero, y 39. Son, pues, 0. 19. 39. Las hypotheſes de la ſegunda reſultante $3yy - 114y + 932 \backsim 0$.

Con las dos primeras hypotheſes, 0. 19. ſe hallarà (5.) la primera raiz de dicha ſegunda igualacion, que ſerà 12, y vſando de las otras hypotheſes 19. 39. ſe hallarà ſer 26. la ſegunda raiz: con que 12. 26. ſon las raizes preciſas de la ſegunda reſultante, è hypotheſes medias para la tercera igualacion, que es la principal: ſus hypotheſes eſtremas (12.) ſon zero, y 3781. Son, pues, ſus quatro hypotheſes, 0. 12. 26. 3781. Con eſtas hypotheſes ſe hallaran (5.) las tres raizes de la igualacion, tomando 0. 12. para hallar la primera, que ſerà 6. con las hypotheſes 12. 26. ſe hallarà

la

la ſegunda 21. y con 26. y 3781. ſe hallarà la tercera 30. con que las tres raizes de la igualacion propueſta ſon 6. 21. 30.

Quando las raizes de vna igualacion reſultante no fueren preciſas, eſtaràn entre dos numeros, qae ſolo ſe diferenciaràn en la vnidad, y daràn por reſulta ſignos opueſtos: y en tal caſo entrambos numeros ſe tomaràn por hypotheſes de la igualacion ſiguiente, vno en defecto del otro; porque ſi ſubſtituyendo el vno de ellos no diere por reſulta el ſigno que ſe requiere, ſegun lo dicho en la Prop. 11. ſe eligirà el otro; y ſi entrambos le dieren ſe podrà eſcoger qualquiera de ellos; pero ſi ninguno le diere, ſe obrarà como dirèmos en la Prop. ſiguiente.

Exemplo 2. Pideſe la reſolucion perfecta de la igualacion v3. — 54vv + 800v — 2400 ⎍ o. Uſando de la regla primera ſe hallaràn las tres igualaciones reſultantes ſiguientes.

3v — 54 ⎍ o.
3vv — 108v + 800 ⎍ o.
v3. — 54vv + 800v — 2400 ⎍ o.

Y vſando de la regla ſegunda, ſe obrarà como ſe ſigue: 3v — 54 ⎍ o. luego 3v ⎍ 54. luego v ⎍ 18. Es, pues, 18. la hypotheſe media de la igualacion ſiguiente; y ſus hypotheſes extremas ſon o. 37. y por conſiguiente o. 18. 37. ſon las hypotheſes de la ſegunda igualacion 3vv — 108v + 800 ⎍ o.

Con las dos primeras hypotheſes o. 18. hallo (5.) eſtàr ſu primera raiz entre 10. y 11. y con las otras dos 18. 37. hallo eſtar la ſegunda raiz entre 25. y 26. y obrando ſegun lo advertido arriba, hallo que 10. y 25. ſon las hypotheſes medias de la vltima igualacion, que es la propueſta; ſus hypotheſes extremas ſon [12.] o. 2401. Son, pues, las quatro o. 10. 25. 2401. y vſando de o. 10. hallo la primera raiz 4. vſando de 10.25. hallo la ſegunda 20. y con las vltimas 25. 2401. hallo la vltima raiz 30. y ſon las tres, 4. 20.30. y queda hecha la total reſolucion.

Exemplo 3. Sea la igualacion que ſe pretende reſolver z4. — 22z3: + 159zz — 418z + 280 ⎍ o. Lo primero, por

por la regla 1. se hallaràn las igualaciones resultantes siguientes.

$$4z - 22 \propto 0.$$
$$6zz - 66z + 159 \propto 0.$$
$$4z3. - 66zz + 318z - 418 \propto 0.$$
$$z4. - 22z3. + 159zz - 418z + 280 \propto 0.$$

Despues de esto, se proseguirà por la regla 2. de esta manera: la primera resultante es $4z - 22 \propto 0.$ luego $4z \propto 22.$ luego $z \propto 5.$ y medio: con que 5. y medio es la hypothese media para la igualacion siguiente; y por huir del quebrado, se podrà tomar 6. mientras no varìe el signo de su resulta. Las hypotheses extremas son o. 12. y las tres, o. 6. 12.

Usando de o. 6. hallo [5.] la primera raiz proxima de la segunda igualacion, que es 4. y vsando del 6. y del 12. hallo la otra, tambien proxima 7. Son, pues, las hypotheses medias para la tercera equacion 4. 7. y siendo las extremas (12.) o. 105. seràn sus quatro hypotheses o. 4. 7. 105. con las quales he de buscar tres raizes de dicha equacion: y assi [5.] hallo entre o. 4. vna raiz proxima 3. entre 4. 7. hallo otra proxima 5. y entre 7. 105. hallo otra tambien proxima 9. y estas tres raizes proximas de la tercera equacion son las hypotheses medias para la quarta, que es la principal: hallando, pues, sus hypotheses extremas, que son o. y 419. son sus cinco hypotheses o.3.5.9.419.y por la Prop. 5. hallo entre o. 3. vna raiz justa 1. entre 3. y 5. hallo otra que es 4. entre 5. y 9. otra que es 7. y entre 9. y 419. otra que es 10. con que se ha resuelto totalmente la igualacion, diziendo ser sus raizes precisas 1.4.7.10. De esta misma suerte se procederà, aunque la igualacion sea de otro qualquiera grado mas alto.

Demonstracion de las reglas.

LO especial que tienen estas reglas consiste solamente en el artificio para hallar las hypotheses, el qual, como hemos visto, se reduce a multiplicar los terminos de la igualacion por sus proprios exponentes, y partir los productos

ductos por la incognita en la forma dicha: Digo, pues, que con este artificio se han de hallar necessariamente las hypotheses, porque multiplicando los terminos, es forçoso se aumenten las raizes; y partiendo por la incognita, es necessario resulte vna igualacion de menos grados, cuyas raizes por causa de la multiplicacion precedente, seràn mayores que las de la igualacion, cuyos terminos se multiplicaron: de suerte, que seràn mayores que la vna raiz, y menores que la otra: luego podràn servir de hypotheses para hallar las raizes que entre ellas se contienen.

En todas las igualaciones propuestas en los exemplos antecedentes, no ha sido menester la preparacion de la Prop. 10. *con que se haze sean los signos alternativos en sus terminos, porque todas llevaban yà consigo essa disposicion; pero si no la llevassen serìa menester vsar de aquella regla; y luego inquirir las raizes verdaderas, como en el exemplo siguiente.*

Exemplo 4. Sea la igualacion $xx + 4x - 12 \backsim 0$. Pidense sus dos raizes, de las quales vna es positiva, por variarse vna vez los signos; y otra negativa, por seguirse otra vez vn mismo signo. *Operacion.* Haganse primeramente los signos alternativos; (10.) suponiendo ser $13 - y \backsim x$. y substituyendo $13 - y$. en lugar de x. en la igualacion, resultarà de la substitucion $yy - 30y + 209 \backsim 0$. resuelvase aora esta igualacion por las reglas dadas; y por la regla 1. se hallaran las resultantes siguientes.

$$2y - 30 \backsim 0.$$
$$yy - 30y + 209 \backsim 0.$$

Y passando à vsar de la regla 2. porque la resultante primera es $2y \backsim 30$. serà $y \backsim 15$. con que 15. es la hypothese media de la igualacion siguiente; y sus extremas seràn 0. 31. Son, pues, las hypotheses 0. 15. 31. y entre 0. y 15. se hallarà vna raiz justa 11. y entre 15. y 31. se hallarà la otra tambien justa 19. Son, pues, 11. y 19. los valores justos de y. Aviendo, pues, supuesto ser $13 - y \backsim x$. substituyendo aqui los valores hallados de y. se sabràn los dos valores de x. y seràn el primero $13 - 11 \backsim x$. esto es, $2 \backsim x$. y el segundo, $13 - 19 \backsim x$. esto es $-6 \backsim x$.

y

y queda reſuelta la igualacion dada, porque ſus dos raizes ſon la vna 2. y la otra — 6.

De eſta miſma ſuerte ſe procederà quando en la igualacion faltaren alguno, ò algunos terminos, como ſe advirtiò en la Prop. 10. Sirva de exemplo la miſma igualacion, que ſe propuſo en ſexto lugar en la Prop. citada.

Exemplo 5. Sea la igualacion que ſe ha de reſolver $x^4.$ * $- 20xx$ * $+ 64 \backsim 0.$ Donde faltan dos terminos, y ſus ſignos no ſon alternativos. *Operacion.* Segun reglas generales, ha de tener eſta igualacion quatro raizes; y porque los terminos que faltan ſe ſuponen negativos, ay ſolamente dos alternaciones de ſignos, que ſon del primero al ſegundo, y del quarto al quinto; con que en ſus quatro raizes ha de aver dos poſitivas, y dos negativas. Eſto ſupueſto, hago lo primero de todo, que ſus terminos alternen los ſignos (10.) como ſe ſigue.

El mayor numero negado es 20. y añadiendole la vnidad, y quitandole vna nueva incognita, ſerà $21 - y.$ y ſuponiendo ſer $21 - y \backsim x.$ ſubſtituyo eſte valor de x. en lugar ſuyo en la igualacion propueſta, de que ſale eſta otra $y^4. - 84y^3. + 2626yy - 36204y + 185725 \backsim 0.$ donde yà no falta termino alguno, y todos alternan ſus ſignos.

Aviendo hecho eſta preparacion, reſuelvo eſta vltima igualacion por las reglas dadas; y valiendome de la primera, multiplico ſus terminos por los exponentes; y partiendo por la incognita reſulta la igualacion del numero 3. y multiplicando los terminos de eſta por ſus exponentes, y partiendo los productos por 2y. ſale la del numero 2. y aſsimiſmo multiplicando los terminos de eſta por ſus exponentes, y partiendo por 3y. reſulta la del num. 1.

Uſando aora de la regla 2. reſuelvo la igualacion del num. 1. y hallo ſer $y \backsim 21.$ Es, pues, 21. la hypotheſe media de la igualacion del num. 2. y halladas ſus hypotheſes extremas (12.) ſon las tres 0. 21. 43. con eſtas reſuelvo la igualacion del numero 2. y hallo ſer ſus raizes 19. 25. que ſirven de hyptheſes medias para la igualacion tercera, con que las hypotheſes de eſta ſon 0. 19. 25. 9052. con las

las quales hallo sus tres raizes, que son 18. 21. 24. y estas son las hypotheses medias para la igualacion del num. 4. y halladas las estremas son sus cinco hypotheses 0.18.21.24. 36205. vltimamente con estas cinco hypotheses, hallo tener quatro raizes justas, que son, $y \backsim 17$. $y \backsim 19$. $y \backsim 23$. $y \backsim 25$. y siendo por la suposicion hecha $x \backsim 21 - y$. Tendrà la igualacion dada tambien quatro raizes, ò valores de x, que se hallan substituyendo los dichos valores de y. en $21 - y \backsim x$. con que serà $21 - 17 \backsim x$. $21 - 19 \backsim x$. $21 - 23 \backsim x$. $21 - 25 \backsim x$. esto es $4 \backsim x$. $2 \backsim x$. $x \backsim -2$. $x \backsim -4$. con que se han hallado todas sus raizes, y conseguido su total resolucion.

Num. 1. $4y - 84 \backsim 0$.

Num. 2. $6yy - 252y + 2626 \backsim 0$.

Num. 3. $4y^3 - 252yy + 5252y - 36204 \backsim 0$.

Num. 4. $y^4 - 84y^3 + 2626yy - 36204y + 185725 \backsim 0$.

Quando las raizes de la igualacion propuesta solo se diferencian en la vnidad, sucederà, que las de la inmediata igualacion antecedente, seràn irracionales; y los dos numeros, entre quienes se halla cada vna de dichas raizes, seràn las raizes efectivas de la propuesta; de suerte, que substituidos en ella, daràn por resulta zero, como se ve en los exemplos siguientes.

Exemplo 6. Sea la igualacion $v^3 - 15vv + 74v - 120 \backsim 0$. Pidense sus raizes. Usando de la regla 1. las resultantes son como se siguen.

$3v - 15 \backsim 0$.

$3vv - 30v + 74 \backsim 0$.

$v^3 - 15vv + 74v - 120 \backsim 0$.

Y resolviendo la primera, hallo $v \backsim 5$. con que las hypotheses para la segunda son 0.5.11. que alternan los signos de sus resultas. Con las dos hypotheses 0. 5. hallo aver vna raiz aproximable entre 4. y 5. y con las otras 5. 11. aver otra aproximable entre 5. y 6. Son, pues, las hypoteses de la tercera igualacion 0. el 4. ò el 5. el 6. y 121. y haziendo las substituciones, veo, que assi el 4. como el 5. y como

y como el 6. dàn por reſulta cero, con que queda concluida la reſolucion, diziendo ſer 4. 5. 6. las raizes de la igualacion propueſta.

Exemplo 7. Sea $v3. - 18vv + 89v - 72 = 0$. ſus reſultantes ſon como ſe ſiguen.

$$3v - 18 = 0.$$
$$3vv - 36v + 89 = 0.$$
$$v3. - 18vv + 89v - 72 = 0.$$

De la primera ſe colige ſer $v = 6$. con que las hypotheſes de la ſegunda ſon o. 6. 13. que alternan los ſignos de ſus reſultas. Vſando de las hypotheſes o. 6. hallo vna raiz aproximable entre 3. y 4. y vſando de las hypotheſes 6. 13. hallo otra aproximable entre 8. y 9. Son, pues, las hypotheſes de la tercera igualacion o. 3. ò el 4. el 8. ò el 9. y 73. de las quales o. dà por reſulta —; y el 3. como tambien el 4. dà +, como ſe requiere; de que infiero, que entre o. y 3. ay vna raiz de la igualacion propueſta; y por las ſubſtituciones hallo ſer 1. la primera raiz juſta. Subſtituyendo deſpues los numeros 8. y 9. para vèr ſi dàn la reſulta que ſe requiere, hallo dàn entrambos cero; con que concluyo ſer las tres raizes 1. 8. 9.

PROP. XIV. Problema.

Determinar ſi ay en la igualacion raizes deficientes, y quantas ſean.

DIxe en la Prop. 11. que ſiendo todas las raizes de vna igualacion efectivas, las hypotheſes han de alternar los ſignos de ſus reſultas, y por conſiguiente en faltando dicha alternacion, ſerá ſeñal faltan alguna, ò algunas raizes. Para conocer, pues, ſi ay en la igualacion raizes deficientes, y quantas ſean, ſerviràn las reglas ſiguientes, que ſon de Monſ. Rollè, en el lib. 2. cap. 6. de ſu Algebra.

REGLA I.

QUando las hypotheſes de vna igualacion reſultante, en lugar de dar el +, ò el — que debian en ſus reſultas para formar ſu alternativa, dan cero; en tal caſo

caſo las que dàn eſta reſulta, ſeràn cada vna de ellas vna raiz de aquella igualacion en que ſe ſubſtituyen; y ſe contarà vna raiz efectiva por cada hypotheſe que hiziere el ſobredicho efecto; y ſerà inutil el comparar aquella hypotheſe con la ſiguiente; de que ſe ſigue, que la igualacion ſiguiente (ſi la huviere) tendrà menos hypotheſes de las que ſegun regla avia de tener; y por conſiguiente menos raizes.

Exemplo 1. Sea la igualacion propueſta $z4 - 48z3. + 864zz - 6912z + 20736 \propto 0$. Pideſe ſu reſolucion. Siguiendo la regla 1. de la Propoſic. paſſada, ſe hallan las igualaciones reſultantes, como ſe ſiguen, cuyos coeficientes ſe han partido por el del primer termino, para que ſean mas breves.

$$z - 12 \propto 0.$$
$$zz - 24z + 144 \propto 0.$$
$$z3. - 36zz + 432z - 1728 \propto 0.$$
$$z4. - 48z3. + 864zz - 6912z + 20736 \propto 0.$$

En la primera igualacion reſultante ſe halla $z \propto 12$. con que las hypotheſes para la ſiguiente ſon 0. 12. 25. pero ſubſtituyendo en ella la hypotheſe media 12. hallo que dà por reſulta zero; de que ſe ſigue ſer inutiles las otras dos hypotheſes 0. 25. y por conſiguiente faltarà vna raiz en la ſegunda reſultante, y tan ſolamente tendrà vna, que es 12. de aqui ſe ſigue, que para la igualacion ſiguiente, que es la tercera, no avrà mas que vna hypotheſe media, que es 12. y las dos extremas; con que ſolo ſeran tres 0. 12. 1729. y ſus raizes ſolo podran ſer dos; y como por ſer de tercer grado avia de tener tres, ſe concluye faltarle vna.

Paſſando à buſcar las dichas dos raizes de la tercera igualacion, con las hypotheſes ſobredichas, ſe halla que la media 12. dà por reſulta zero; con que es vna raiz de la tercera igualacion; y por la razon que antes dixe no tendrà otra raiz; y eſta ſervirà de hypotheſe media para la vltima igualacion, que es la propueſta al principio, cuyas hypotheſes ſeràn ſolas tres 0. 12. 6913. y buſcando por medio

de o. y 12. vna raiz, ſe halla que 12. da por reſulta zero; y por conſiguiente ſon inutiles las otras hypotheſes; con que ſolo tiene vna raiz 12. y las otras tres, que por ſer del quarto grado avia de tener, ſon deficientes: ſi bien es verdad que podemos dezir, tienen ſemejantes igualaciones quatro raizes iguales, como en eſta ſon 12. 12. 12. 12. porque ſi ſe toma por raiz $z - 12 \propto 0$. y ſe multiplica por sì miſma haſta formar la quarta poteſtad, ſaldrà la igualacion ſobredicha: à las que ſon deficientes en eſte ſentido, llamo *deficientes de la primera eſpecie*, à diſtincion de las que totalmente faltan, que llamarè *deficientes de la ſegunda eſpecie.*

Exemplo 2 Sea la igualacion $y3. - 15yy + 72y - 108 \propto 0$. Pideſe ſu reſolucion. Las reſultantes, reducido el primer termino à vnidad, ſon las ſiguientes.

$$y - 5 \propto 0.$$
$$yy - 10y + 24 \propto 0.$$
$$y3. - 15yy + 72y - 108 \propto 0.$$

En la primera reſultante es $y \propto 5$. y aſsi las hypotheſes de la ſegunda ſeràn o. 5. 11. mediantes las o. 5. hallo $y \propto 4$. en dicha ſegunda igualacion, y valiendome de las hypotheſes 5. 11. hallo $y \propto 6$. con que las hypotheſes de la tercera igualacion, que es la propueſta ſon o.4.6.15. valiendome de o. 4. hallo $y \propto 3$. y aſsi 3. es vna de las raizes de la igualacion propueſta: mas queriendo ſervirme de las 4.6. hallo que 6. es vna de las raizes de la miſma igualacion, por lo qual las hypotheſes 4. 15. ſon inutiles, por no poder aver otras raizes entre 4. 6. ni entre 6. 15. tiene, pues, la igualacion propueſta ſolas dos raizes 3. 6. y como, por ſer del tercer grado, avia de tener tres, ſe ſigue aver vna deficiente de la primera eſpecie: pero, como advertì en el exemplo antecedente, podemos dezir tiene tres, que ſon 3. 6. 6. por nacer dicha igualacion de la multiplicacion de $y - 3 \propto 0$. y $- 6 \propto 0$. lo qual concuerda tambien con lo que en otra parte dixe, que ſi 9. que es la ſuma de las dos raizes 3. 6. ſe reſta de 15. coeficiente del ſegundo termino, es el reſiduo 6. o ſi el homogeneo 108. ſe parte por 18. producto de dichas dos raizes, es tambien el quociente 6.

RE-

REGLA II.

QUando la ſubſtitucion de las hypotheſes en las igualaciones reſultantes, ni dà por reſulta zero; ni tampoco dà la alternacion de ſignos que ſe requiere, ſegun lo dicho al fin de la Prop. 11. en eſte caſo por cada par de ſignos que no ſe alternan, ſe contarà vna raiz defectiva de la ſegunda eſpecie, en la igualacion, en quien ſe ſubſtituyen dichas hypotheſes; y otras tantas en las que ſe ſiguieren; como ſi en lugar de ſer las reſultas + — + fueren + + +, faltarian dos raizes, porque aviendoſe de hallar eſtas entre dos hypotheſes de contrarios efectos, ò ſignos, ſiendo eſtos los miſmos, no tendràn dichas hypotheſes entre sì raiz alguna de la igualacion racional, ni irracional, por requerir eſtas reſultas contrarias en las hypotheſes, que las comprehenden.

Exemplo 1. Sea la igualacion $zz - 6z + 17 \backsim 0$. cuya reſolucion ſe deſea. Siguiendo la regla 1. de la Prop. paſſada, ſeran las reſultas que ſe ſiguen.

$$2z - 6 \backsim 0.$$
$$zz - 6z + 17 \backsim 0.$$

En virtud de la primera es $z \backsim 3$. con que las hypotheſes de la ſegunda igualacion, que es la propueſta, ſon 0. 3. 7. y haziendo las ſubſtituciones hallo que la hypotheſe media 3. dà +, aviendo de dar —, lo que haze inutiles las otras dos hypotheſes 0. 7. de que ſe ſigue aver dos raizes deficientes en la igualacion dada; y como eſta no pueda tener mas dos raizes, por ſer del ſegundo grado, ſe ſigue no tener raiz alguna efectiva.

Exemplo 2. Sea la igualacion $v3. - 9vv + 30v - 72 \backsim 0$. Pideſe ſu reſolucion. Obrando por la Propoſ. antecedente, ſalen las ſiguientes, reducido ſu primer termino à vnidad.

$$v - 5 \backsim 0.$$
$$vv - 6v + 10 \backsim 0.$$
$$v3. - 9vv + 30v - 72 \backsim 0.$$

En la primera hallo v ∽ 3. y assi son las hypotheses de la segunda o. 3. 7. y haziendo su substitucion, hallo que la segunda que es 3. dà por resulta +, en lugar de dar —, con que las otras dos o. 7. son inutiles; y por consiguiente, faltan dos raizes en esta segunda igualacion; y como estas avian de ser hypotheses medias de la tercera, se sigue no tener esta mas hypotheses, que o. y 73. y que le faltan dos raizes: buscando, pues, con las o. 73. la raiz que solamente tiene, hallo ser 6. y queda hecha la resolucion.

Exemplo 3. Pidese la resolucion de la igualacion v3. — 27vv + 240v — 504 ∽ o. Siguiendo nuestras reglas son las resultantes.

v — 9 ∽ o.
vv — 18v + 80 ∽ o.
v3. — 27vv + 240v — 504 ∽ o.

Las hypotheses de la segunda resultante son o. 9. 19. y por las substituciones hallo ser sus resultas + — + como se requiere; y prosiguiendo con las substituciones, encuentro dos raizes de dicha segunda igualacion, que son 8. 10. y por consiguiente tengo las hypotheses de la igualacion vltima, y principal, que son o. 8. 10. 505. Haziendo eleccion de o. y 8. hallo v ∽ 3. que es vna raiz; pero tomando las hypotheses 8. y 10. hallo que 10. da + en lugar de dar —, como se requeria, lo que buelve inutiles las tres hypotheses 8. 10. 505. de que infiero faltan dos raizes en la igualacion propuesta; y que solo tiene por raiz el 3. que antes se hallò.

Exemplo 4. Pidese la resolucion de y3. — 36yy + 240y — 1800 ∽ o. Siguiendo la regla se hallaran ser sus hypotheses o. 4. 20. 2000. La substitucion de la segunda avia de dar +, y dà —, con que le faltan dos raizes; y con las hypotheses 20. y 2000. se hallara la vnica raiz 30.

ADVERTENCIA.

Quando las raizes de vna igualacion resultante fueren irracionales, podrà servir de hypothese para la siguiente igualacion, qualquiera de los dos numeros, que diferenciandose *en*

en la vnidad, comprehenden entre sì la sobredicha raiz, mientras que substituìdo en la igualacion, en quien ha de servir de hypothese, produzga la resulta del +, ò -- que se requiere, como arriba dixe; pero si ninguno de ellos diere el +, ò el -- requisito, no por esso se ha de dàr en este caso yà por constante, faltar alguna, ò algunas raizes efectivas en dicha igualacion; porque aproximando mas, y mas dichas hypotheses por la Prop. 6. y substituyendolas despues de aproximadas, sucederà algunas vezes dàr el +, ò el -- que se requiere; y por consiguiente se podràn hallar con ellas las raizes de la igualacion, que en semejantes casos seràn irracionales. Veo ser el negocio prolixo, por averse de hazer muchas aproximaciones, y substituciones, hasta poderse assegurar no ser possible alguna, que en virtud de la substitucion haga las resultas con el +, ò el -- que se requiere; y como en ello no reconozca especial vtilidad, no me detengo mas en esta materia.

CAPITULO V.

RESUELVENSE POR LAS REGLAS dadas varias questiones de igualacion compuesta, en que solo concurre vna magnitud incognita.

PAra exercicio de lo que en este libro hemos explicado de la Analysi compuesta, resolverèmos aora diferentes questiones, segun las reglas generales, que se han dado; à que se añadirà en el capitulo siguiente la explicacion de algunas otras particulares, que muchas vezes podràn facilitar las operaciones, consiguiendo el mismo fin de la resolucion por mas breve camino; y aunque en el plantèo de las questiones siguientes concurran diferentes incognitas; pero como se excluyan facilmente en virtud de las substituciones, que en diferentes partes se han explicado, se podràn resolver por las reglas dadas, sin tropezar con dificultad alguna.

QUESTION I.

Pidenſe dos numeros, que ſumados hagan 25. y multiplicados, 84.

SEa el vno x. y el otro z. Y ſiguiendo el tenor de la propueſta, hallo eſtas dos igualaciones $x + z \backsim 25$. $xz \backsim 84$. deſpejando la x. en la primera, es $x \backsim 25 - z$. ſubſtituyo $25 - z$. en lugar de x. en la igualacion ſegunda, multiplicando dicho valor por z. y es el producto $25z - zz \backsim 84$. Para la reſolucion paſſo al 84. al primer miembro, y es $25z - zz - 84 \backsim 0$. y ordenados los terminos, es $- zz + 25z - 84 \backsim 0$. donde ſe vè tiene eſta igualacion dos raizes, y entrambas poſitivas. Uſando, pues, de las reglas dadas ſon ſus reſultantes las ſiguientes.

$$2z - 25 \backsim 0.$$
$$zz - 25z + 84 \backsim 0.$$

En la primera reſultante ſe halla $z \backsim 12$. y medio; y eſta es la hypotheſe media de la igualacion ſiguiente, que es la principal; y por evitar el quebrado ſe puede tomar el 12. Son, pues, las hypotheſes 0. 12. 26. Con las dos primeras hallo la raiz menor, que es 4. y reſtando 4. de 25. el reſiduo 21. es la raiz mayor: y digo, que los dos numeros que ſe piden ſon 4. 21. que ſatisfacen la queſtion.

QUESTION II.

Pidenſe dos numeros, cuya diferencia ſea 17. y multiplicados hagan 84.

SEa el numero mayor v. y el menor ſea y. y ſe expreſſarà la queſtion en las dos igualaciones ſiguientes: la primera $v - y \backsim 17$. y la ſegunda $vy \backsim 84$. Deſpejando la v. en la primera igualacion, es $v \backsim 17 + y$. ſubſtituyendo eſte valor en lugar de v. en la ſegunda, ſe hallara $17y + yy \backsim 84$. Y ordenados los terminos para la reſolucion, es $yy + 17y - 84 \backsim 0$. Donde ay dos raizes ſegun regla, vna poſitiva, y otra negativa, que ſe hallaràn por las reglas dadas ſer 4. la poſitiva, y la negativa $- 21$. eſcogiendo, pues, la poſitiva, por pedirſe la reſpueſta en numeros poſi-

poſitivos, ſe ſubſtituirà 4. en lugar de y. en la igualacion $v \propto 17 + y$. y ſerà $v \propto 21$. ſon, pues, los numeros 21. y 4. que ſatisfacen la queſtion. Haziendo eleccion del valor negativo de y. que es -21. ſe hallarà el numero mayor, ò valor de v. ſer -4. que tambien ſatisfacen la queſtion; porque reſtando el menor que es -21. del mayor -4. es el reſiduo $+17$. y el producto de los miſmos es 84.

QUESTION III.

Hallar dos numeros, cuya ſuma 16. tenga con el producto de dichos numeros la razon de 1. con 3.

EL vn numero ſea t. y el otro v. con que ſerà $t + v \propto 16$. y por Antitheſi $t \propto 16 - v$. el producto de dichos numeros es tv; y ſubſtituyendo $16 - v$. en lugar de t. ſerà el producto $16v - vv$. y ſegun la propueſta ſon quatro proporcionales: 16. $16v - vv$. 1. 3. y el producto de los extremos, igual al de los medios, con que es la igualacion $16v - vv \propto 48$. que ordenada, y variados los ſignos, es $vv - 16v + 48 \propto 0$. y hecha la reſolucion por nueſtras reglas, ſe hallaràn los numeros que ſe piden 4. 12. de la miſma ſuerte ſe reſolveràn las queſtiones ſiguientes, y ſe hallaràn en todas los miſmos numeros 4. 12.

Hallar dos numeros, cuya diferencia 8. tenga con el producto de los miſmos, la razon de 1. con 6.

Hallar dos numeros, cuya ſuma tenga con 48. producto de los miſmos, la razon de 1. con 3.

Hallar dos numeros, cuya diferencia tenga con 48. producto de los miſmos, la razon de 1. con 6.

QUESTION IV.

Hallar dos numeros, cuya ſuma ſea 12. y la ſuma de ſus quadrados ſea 104.

SUpongo ſea el vn numero t. y el otro v. y ſerà $t + v \propto 12$. como tambien $tt + vv \propto 104$. deſpejada la primera igualacion, es $t \propto 12 - v$. Subſtituyendo $12 - v$. en lugar de t. en la ſegunda igualacion, reſulta $144 - 24v$

+ 2vv ∽ 104. luego por antithesi, 40 — 24v + 2vv ∽ o. que ordenados los terminos, es 2vv — 24v + 40 ∽ o. y partiendoles à todos por 2. coeficiente del primer termino, es vv — 12v + 20 ∽ o. donde se vè ay dos raizes positivas, que son los dos numeros que se piden. Resuelvase esta igualacion por las reglas dadas, y se hallaràn ser los numeros 10. 2. que satisfacen la question.

QUESTION V.

Hallar dos numeros, cuya diferencia sea 8. y la suma de sus quadrados sea 104.

SEa como antes vn numero t. y el otro v. y siguiendo la propuesta serà t — v ∽ 8. y tt + vv ∽ 104. Despejando la primera igualacion, es t ∽ 8 + v. Substituyendo este valor en lugar de t. en la segunda, es 2vv + 16v + 64 ∽ 104. luego por antithesi, 2vv + 16v ∽ 40. y por consiguiente 2vv + 16v — 40 ∽ o. reducido el primer termino a vnidad, es vv + 8v — 20 ∽ o. Donde se vè aver dos raizes, vna positiva, y otra negativa. Usando de nuestras reglas, se halla ser la positiva 2. con que v ∽ 2. y porque t. se hallò igual à 8 + v. serà igual à 10. que son los numeros que se piden. Si se quiere el otro valor de v negativo, se hallarà ser — 10. y siendo, como dixe, t ∽ 8 + v. serà el valor de t ∽ 8 — 10. esto es, t. serà — 2. y estos dos valores — 10. — 2. satisfacen tambien la question; porque si del mayor — 2. se quita el menor — 10. es el residuo 8. como pide la question; y la suma 4. quadrado de — 2. y del 100. quadrado de — 10. es tambien 104. como se pide. Las dos siguientes questiones se resolveràn con suma facilidad por venir à parar en lineares; y se hallaràn los mismos numeros 10. 2.

Dada suma 12. de dos numeros, y la diferencia 96. de sus quadrados, hallar los numeros.

Dada la diferencia 8. de dos numeros; y la de sus quadrados 96. hallar los numeros.

QUES-

QUESTIO VI.

Dado el produćto 20. de dos cantidades ; y la ſuma 104. de ſus quadrados, hallar las cantidades.

SEan las dos magnitudes y. v. ſu produćto es $yv \propto 20$. La ſuma de ſus quadrados es $yy + vv \propto 104$. Deſpejada la primera igualacion, es $y \propto \frac{20}{v}$ ſubſtituyendo eſte valor en lugar de y. en la ſegunda, es $\frac{400}{vv} + vv \propto 104$. y quitado el quebrado, es $400 + v4. \propto 104vv$. y ordenados todos los terminos en la primera parte de la igualacion, es $v4. * - 104\,vv * + 400 \propto 0$. Reſuelvaſe eſta igualacion, como en el exemplo 5. de la Prop. 13. y ſe hallaràn ſus quatro raizes, dos poſitivas, que ſon 2. 10. que ſatisfacen la queſtion; y otras dos negativas, que ſon, la vna -2. y la otra -10, que de la miſma manera la ſatiſfacen.

QUESTION VII.

Dado el produćto 20. de dos magnitudes, y la diferencia 96. de ſus quadrados, hallar las magnitudes.

SEan las magnitudes z. y. ſu produćto es $zy \propto 20$. La diferencia de ſus quadrados es $zz - yy \propto 96$. Deſpejada la primera igualacion, es $z \propto \frac{20}{y}$ ſubſtituyo eſte valor en lugar de z. en la ſegunda, y reſultarà $\frac{400}{yy} - yy \propto 96$. quitado el quebrado, es $400 - y4. \propto 96yy$. y ordenados los terminos en la primera parte de la igualacion, es $y4. * + 96yy * - 400 \propto 0$. que ſegun reglas ha de tener quatro raizes, tres poſitivas, y vna negativa; y haziendo la reſolucion ſegun nueſtra methodo, ſe hallaràn ſer las tres poſitivas 10. 10. 2. y la negativa -2. Todas las quales ſon valores de y. y tanto las poſitivas, como las negativas, ſatisfaràn la propueſta; porque ſuponiendo que y. ſea 10. ſerà z. lo miſmo que 2. que es vna ſatisfaccion: tambien ſupo-

ſuponiendo que y. ſea 2. ſerà z. lo miſmo que 10. que es ſegunda reſpueſta; aſsimiſmo, ſuponiendo que y. ſea — 2. ſerà z. lo miſmo que — 10. que es tercera reſpueſta, como ſe puede probar.

QUESTION VIII.

Dada la ſuma 12. *de dos magnitudes; y la ſuma del producto de las miſmas magnitudes, con ſus quadrados, por exemplo* 124. *hallar las magnitudes.*

LAs dos magnitudes que ſe buſcan ſean t. v. y ſerà ſu ſuma t + v ∽ 12. Su producto ſumado con ſus quadrados es tv + tt + vv ∽ 124. Deſpejando la primera igualacion, ſe halla t ∽ 12. — v. y ſubſtituyendo eſte valor de t. en lugar ſuyo en la ſegunda igualacion; y quitado lo ſuperfluo, ſale 20 ∽ 12v — vv. y ordenados los terminos, y variados los ſignos, es vv — 12v + 20 ∽ 0. Reſolviendo eſta igualacion como las paſſadas, ſe hallan ſus dos raizes poſitivas 10. 2. que ſatisfacen la queſtion. De lo dicho inferirà el Analiſta la reſolucion de las queſtiones ſiguientes.

Dada la diferencia 18. *de dos magnitudes; y la ſuma de ſu producto con ſus quadrados* 124. *hallar las magnitudes.*

Dada vna de dos magnitudes 2. *y la ſuma del producto de entrambas con ſus quadrados* 124. *hallar la otra magnitud.*

Dado el producto 20. *de dos magnitudes; y la ſuma* 124. *de dicho producto con ſus quadrados, hallar las magnitudes.*

QUESTION IX.

Dada la ſuma de 8. *de dos magnitudes; y la de ſus cubos* 152. *hallar las magnitudes.*

LAs dos magnitudes ſean r. t. y ſerà r + t ∽ 8. igualacion primera; y aſsimiſmo, r3 + t3. ∽ 152. igualacion ſegunda. Deſpejada la primera, es r ∽ 8 — t. ſubſtituìdo eſte valor en lugar de r. en la ſegunda igualacion, reſultarà vna otra, que quitado lo ſuperfluo, ſerà 360 ∽ 192t — 24tt. y partiendolo todo por 24. ſerà 15 ∽ 8t — tt.

va-

variados los ſignos, y ordenados los terminos, es $tt - 8t +$ 15 ⎍ 0. cuyas dos raizes poſitivas, ſegun nueſtras reglas, ſeràn 5. 3. que ſatisfacen la propueſta. Con el miſmo eſtilo ſe reſuelven las queſtiones ſiguientes.

Dada la diferencia 2. de dos magnitudes, y la de ſus cubos 98. hallar dichas magnitudes.

Dada la ſuma 8. de dos magnitudes; y la diferencia 98. de ſus cubos, hallar las magnitudes.

Dada la diferencia 2. de las magnitudes; y la ſuma 152. de ſus cubos, hallar las miſmas magnitudes.

QUESTION X.

Dada la ſuma 10. de dos numeros; y la ſuma 472. del quadrado-quadrado del menor, con el cubo del mayor, hallar los ſobredichos numeros.

EL numero mayor ſea r. y el menor v. ſerà $r + v$ ⎍ 10. igualacion primera; como tambien $r^3 + v^4$ ⎍ 472. igualacion ſegunda. En la primera ſe halla por Antitheſi r ⎍ $10 - v$. ſubſtituido eſte valor de r. en lugar ſuyo en la ſegunda igualacion, ſale la ſiguiente: $v^4 - v^3 + 30vv - 300v + 528$ ⎍ 0. donde ſolo ſe halla vna incognita, que es la v. Reſuelta eſta igualacion por las reglas dadas, ſe halla vna raiz poſitiva, que es 4. las demàs ſon deficientes. Conocido, pues, el valor de v. que es 4. ſiendo r ⎍ $10 - v$. ſerà r ⎍ 6. y eſtos ſon los dos numeros que ſe piden. A ſemejança de eſta ſe podrà proponer el Analyſta innumerables queſtiones, que podrà reſolver de la miſma manera.

QUESTION XI.

Dada la ſuma 34. de los extremos de tres continuos proporcionales Geometricos, y dado el medio 8. hallar los extremos.

SEan los extremos que ſe piden, x. z. y ſeràn tres proporcionales x. 8. z. y ſiguiendo la propueſta, ſe halla la igualacion ſiguiente, $x + z$ ⎍ 34. que es la primera: y porque en tres proporcionales, el producto de los extremos

mos es igual al quadrado del medio (20. 7. Eucl.) ſerà la ſegunda igualacion xz ∽ 64. Deſpejando la primera, ſe halla x ∽ 34. — z. ſubſtituyo eſte valor en lugar de x. en la ſegunda, reſulta 34z — zz ∽ 64. y ordenados los terminos — zz + 34z — 64 ∽ 0. Reſuelvaſe eſta igualacion, y ſe hallaràn dos valores poſitivos de z. que ſon z ∽ 2. z ∽ 32. y eſtos ſon los dos numeros que ſe piden; porque ſupueſto ſea z ∽ 2. por ſer x ∽ 34 — z. ſerà x ∽ 32. y ſi ſe quiere ſea z ∽ 32. ſerà x ∽ 2. que todo es vno para el caſo. Con el miſmo eſtilo ſe reſolverà la queſtion ſiguiente.

Conocida la diferencia 30. *de los extremos; y conocido el termino medio* 8. *en tres proporcionales Geometricos, hallar los extremos.*

QUESTION XII.

Dada la ſuma 180. *de los quadrados de dos magnitudes; y la razon del producto de dichas magnitudes con el quadrado de ſu diferencia (por exemplo) como* 2. *con* 1. *hallar las magnitudes.*

SEan las magnitudes ſ. p. y ſerà la ſuma de ſus quadrados ſſ + pp ∽ 180. igualacion primera. La diferencia de las magnitudes es ſ — p. cuyo quadrado es pp — 2ſp + ſſ. Y ſiendo proporcionales, ſegun la propueſta ſp. pp—2ſp+ſſ::2.1. ſerà [20.7.Eucl.] 2pp—4ſp + 2ſſ ∽ ſp. Deſpejando la primera igualacion, ſerà pp ∽ 180 — ſſ. ſubſtituyendo eſte valor de pp. en la ſegunda, ſale quitado lo ſuperfluo 360 -- 4pſ ∽ ſp. Eſto es, 360 ∽ 5 ſp. luego 72 ∽ ſp. con que ſe ha conocido el producto de los numeros; y ſupueſto que eſte, con la diferencia de los quadrados es como 2. con 1. ſera por regla de tres, como 2. con 1. aſsi 72. con 36. Es, pues, 36. el quadrado de la diferencia de los numeros; luego ſu raiz 6. es la diferencia de los miſmos.

Conocida, pues, la diferencia de los numeros, que es 6. y ſu producto 72. ſe hallaràn, como en la queſtion 2. los numeros que ſe piden, que en eſte exemplo ſon 12. 6.

CA-

CAPITULO VI.

RESUELVENSE ALGUNAS QUESTIONES de igualacion compuesta, planteandolas por vna regla particular, con que se reducen à lineares, ò simples.

LA Regla es la siguiente: *En las questiones, ò se dà conocida la suma de dos magnitudes, ignorandose su diferencia; ò se dà conocida su diferencia, ignorandose la suma; ò entrambas cosas se ignoran. Si la suma es conocida; y la diferencia se ignora, se supondrà ser 2a. la suma; y 2y. la diferencia: Si se ignora la suma, y se sabe la diferencia, se supondrà ser 2y. la suma, y 2a. la diferencia: si entrambas cosas se ignoran se supondrà ser 2v. la suma, y 2y. la diferencia. Con esto se seguirà el tenor de la question, que vendrà à parar en vna igualacion linear, ù del primer grado, que se resolverà con la facilidad que se vè en las questiones siguientes.*

QUESTION XIII.

Pidense dos numeros, que sumados hagan 12. y multiplicados 32.

ESta question es la primera que se resolviò por regla general; pero por la sobredicha se resolverà en la forma siguiente.

La suma dada sea 2a. y la diferencia que se ignora, sea 2y. sea b. el producto conocido; el numero mayor serà $a + y$. y el menor $a - y$. porque añadiendo la semidiferencia à la semisuma, resulta el numero mayor; y tambien quitando la semidiferencia, de la semisuma, resulta el numero menor, como es notorio: Multiplicando, pues, el vno por el otro, como manda la propuesta, es el producto $aa - yy \backsim b$. y por Antithesi $yy \backsim aa - b$. luego $y \backsim \sqrt{(aa - b.)}$ esto es y. igual à la raiz de 4. luego $y \backsim 2$. Queda, pues,

pues, conocida lo ſemidiferencia de los numeros que ſe piden; y por conſiguiente el mayor, que era a + y. ſerà 8. y el menor a — y. ſerà 4. que ſatisfacen la queſtion.

QUESTION XIV.

Pidenſe dos numeros, cuya diferencia ſea 4. y multiplicados hagan 32.

ESta es la ſegunda queſtion, que arriba reſolvimos. Sea 2y. la ſuma de los numeros; y ſu diferencia conocida ſea 2a. y el producto ſea b. y ſerà el numero mayor y + a. y el menor y — a. y ſu producto yy — aa ∽ b. luego por Antitheſi es yy ∽ b + aa. luego y ∽ √(b + aa.) eſto es, y ∽ 6. luego y + a ∽ 8. numero primero: y — a ∽ 4. numero ſegundo.

QUESTION XV.

Dada la ſuma 12. de dos magnitudes; y la ſuma 80. de ſus quadrados, hallar las magnitudes.

SE reſolviò por reglas generales en el num. 4. Sea, pues, la ſuma conocida 2a. ſea 2y. la diferencia, que ſe ignora; y 2b. la ſuma conocida de los quadrados. La magnitud mayor ſerà a + y. y la menor a — y. ſus quadrados ſon aa + 2ay + yy. Y aa — 2ay + yy, la ſuma de eſtos dos quadrados es 2aa + 2yy ∽ 2b. luego aa + yy ∽ b. luego yy ∽ b — aa. eſto es, yy ∽ 4. luego y ∽ 2. con que la primera magnitud es a + y ∽ 8. y la ſegunda a — y ∽ 4.

QUESTION XVI.

Dado el producto 32. de dos magnitudes; y la ſuma 80. de ſus quadrados hallar las magnitudes.

ESta es la queſtion reſuelta en ſexto lugar. Sea 2z. la ſuma ignorada de las magnitudes; y ſu diferencia, tambien ignorada, 2y. Su producto dado ſea a. y ſea 2b. la ſuma conocida de los quadrados. La magnitud mayor ſerà z + y. la menor z — y. y el producto de eſtas ſerà zz — yy ∽ a. y por Antitheſi zz ∽ yy + a. La ſuma de los

los quadrados $zz + 2zy + yy$. y $zz - 2zy + yy$. es $2zz + 2yy \propto 2b$. luego $zz + yy \propto b$. luego por Antithesi serà $zz \propto b - yy$. y como antes se aya hallado $zz \propto yy - a$. serà $b - yy \propto yy + a$. luego $2yy \propto b - a$. esto es, $2yy \propto 8$. luego $yy \propto 4$. luego $y \propto 2$. Y siendo $zz \propto yy + a$. serà $zz \propto 36$. luego $z \propto 6$. con que la magnitud mayor $z + y \propto 8$. y la menor $z - y \propto 4$. Son, pues, 8.4. los numeros que se piden.

QUESTION XVII.

Dada la suma de dos potestades de igual grado; y la diferencia de las mismas potestades, hallar las magnitudes, que son sus raizes.

SUpongase $2a$. en lugar de la suma conocida de las potestades; y $2b$. en lugar de su diferencia tambien conocida; y serà la potestad del mayor $a + b$. y la del menor $a - b$. saquese de entrambas la raiz competente à la potestad, y quedarà resuelta la question.

QUESTION XVIII.

Dada la suma de los quadrados de dos magnitudes, como por exemplo 80. y la razon del producto de dichas magnitudes, con el quadrado de su diferencia, hallar las magnitudes.

SEa $2z$. la suma de las magnitudes; y su diferencia sea $2y$. con que serà la mayor $z + y$. y la menor $z - y$. Sea $2a$. la suma conocida de sus quadrados; el producto de las magnitudes sera $zz - yy$. el quadrado de la diferencia de las mismas serà $4yy$. y porque han de tener entre si la razon de vna cantidad conocida b. que supongo sea 2. à otra conocida c. que supongo por exemplo sea 1. seran quatro proporcionales.

$$zz - yy.\ \ 4yy.\ :: \ b.\ \ c.$$

Luego (20. 7. Eucl.) el producto de los extremos es igual al de los medios: $czz - cyy \propto 4byy$. y por Antithesi

czz

$czz \backsim 4byy + cyy$. luego $zz \backsim \frac{4byy + cyy}{c}$ Tambien por la primera ſupoſicion, ſerà la ſuma de los quadrados $zz + 2yy \backsim 2a$. luego $zz \backsim a - yy$. luego los dos valores de zz. forman eſta igualacion $a - yy \backsim \frac{4byy + cyy}{c}$ Multiplicandolo todo por el denominador c. ſerà $ac - cyy \backsim 4byy + cyy$. luego $ac \backsim 4byy + 2cyy$. luego partiendolo todo por $4b + 2c$. para deſpejar la yy. ſerà $yy \backsim \frac{ac}{4b + 2c}$ eſto es, $yy \backsim 4$. luego $y \backsim 2$. y ſubſtituyendo eſte valor de y. en lugar ſuyo en la igualacion $zz \backsim a - yy$. ſerà $zz \backsim 36$. luego $z \backsim 6$. con que la cantidad mayor es $z + y \backsim 8$. y la menor $z - y \backsim 4$. Con eſte eſtilo ſe reſolveràn otras muchas queſtiones ſemejantes.

El modo de deſpejar las incognitas por particion, ſe explicarà en el libro ſiguiente.



APENDICE

AL LIBRO QUINTO DE ALGEBRA; en que ſe reſuelven por Methodo mas facil las igualaciones compueſtas de tres caracteres.

SIendo infinitas las queſtiones, cuya reſolucion ſe termina en la igualacion de tres caracteres; y viendo que los modos, que propone el Autor en los Libros IV. y V. de ſu Algebra (aunque mas vniverſales; pues ſe eſtienden à qualquiera compoſicion de caracteres) no obſtante ſer ingenioſos, ſon moleſtiſsimos, y nada cientificos; por proceder como tentando. Me ha parecido, en eſta ſegunda impreſsion, añadir la Methodo comun de reſolver las igualaciones de tres caracteres, que, ò ſe ſiguen inmediatos, ſegun el orden natural de ſus exponentes, como en las igualaciones quadradas; ò alternan igualmente, omitiendo vn caracter entre el mayor, y mediano, y otro entre eſte, y el menor; como en las igualaciones quadrado-quadradas; como tambien para las demàs, que alternan, omitiendo en la forma dicha, dos, ò mas caracteres: como luego dirèmos.

§. I.

LA igualacion de tres caracteres, puede venir de tres maneras. La primera, quando el mayor, y menor ſe igualan al mediano, como en eſta.

x2 + 32 ∽ 12: x.

La ſegunda, quando el caracter mayor ſe iguala al mediano, y menor, como aqui ſe ve.

x2 ∽ 6: x + 16.

Y la tercera, quando el caracter mayor, y mediano, ſon iguales al menor, como en la ſiguiente.

$$x^2 + 6{:}\,x \propto 16.$$

Y pueſtos todos los terminos en vna parte de la igualacion, como ſe eſtila, apareceràn dichas tres igualaciones en eſta forma.

Primera.	$x^2 - 12{:}x + 32 \propto 0.$
Segunda.	$x^2 - 6{:}\,x - 16 \propto 0.$
Tercera.	$x^2 + 6{:}\,x - 16 \propto 0.$

§. II.

Regla vniverſal para la reſolucion de las tres igualaciones dichas.

QUadreſe la mitad de el coeficiente de el caracter mediano, y ſi el caracter menor tuviere el ſigno + reſteſe de dicho quadrado el numero de el caracter menor; pero ſi dicho caracter menor llevàre el ſigno —, añadaſe el numero de el caracter menor, à dicho quadrado (de ſuerte, que la operacion es contraria à los ſignos) la raiz quadrada de la reſta, ò ſuma dichas, ſumada, con la mitad de el coeficiente de el caracter mediano, darà la raiz mayor, y ſu diferencia ſerà la raiz menor: todo lo qual ſe harà facil con los exemplos.

Exemplo de la primera igualacion.

LA primera igualacion arriba propueſta, es la ſiguiente.

$$x^2 - 12{:}x + 32 \propto 0.$$

La que ſe reſuelve de eſte modo: El coeficiente de el caracter mediano es 12. ſu mitad es 6. quadreſe, y ſu quadrado ſerà 36. y porque el caracter menor 32. lleva el ſigno + reſteſe de 36. el 32. y de el reſiduo 4. Saqueſe la raiz quadrada 2. que ſumado con 6. mitad de el coeficiente mediano haze 8. raiz mayor; y reſtando 2. de 6. quedan 4. raiz menor: como aqui ſe vè.

Mitad de el coeficiente.	6	
Raiz hallada.	2	
Suma.	8	Raiz mayor.
Diferencia.	4	Raiz menor.

Exem-

Exemplo de la ſegunda, y tercera igualacion.

Sean las igualaciones ſegunda, y tercera, las que ſe ſiguen.

$$x^{2} - 6 : x - 16 \backsim 0.$$
$$x^{2} + 6 : x - 16 \backsim 0.$$

Su reſolucion es como ſe ſigue: El coeficiente de el caracter mediano es 6. ſu mitad 3. à cuyo quadrado 9. añadiendo 16. (por llevar el ſigno —) hazen 25. cuya raiz quadrada es 5. La que ſumada con 3. mitad de el coeficiente de el caracter mediano, haze 8. raiz mayor (que ſirve à la ſegunda igualacion) y reſtando el 3. de el 5. viene el 2. raiz menor, (que pertenece à la tercera igualacion.)

Mitad de el coeficiente.	3	
Raiz hallada.	5	
Suma.	8	Raiz mayor, para la ſegunda.
Diferencia.	2	Raiz menor, para la tercera.

De ſuerte, que en la primera igualacion, ſirven entrambas raizes; pero en la ſegunda ſolo ſirve la mayor, y la menor es negativa; mas en la tercera igualacion, ſirve la menor raiz, y la mayor es negativa.

Advierto, que ſi en la primera igualacion, el quadrado de la mitad de el coeficiente de el caracter mediano fuere igual al numero, caracter menor, dicha mitad ſerà la vnica raiz de la igualacion, como en eſta.

$$x^{2} - 6 : x + 9 \backsim 0.$$

Donde el 3. mitad de 6. es la vnica raiz de eſta igualacion; y en eſte caſo tendrà la queſtion vna ſola reſpueſta.

Pero ſi el quadrado de la mitad de el coeficiente de el caracter mediano, fuere menor, que el numero, caracter menor, la queſtion ſerà impoſsible, como ſe manifieſta en eſta igualacion.

$$x^{2} - 4 : x + 12 \backsim 0.$$

Quando la ſuma, ò diferencia de el quadrado de la mitad de el coeficiente de el caracter mediano, y de el numero,

caracter menor, no tuviere raiz quadrada juſta, ſe le pondrà el ſigno radical V.delante, y ſe ſumarà, y reſtarà con los ſignos +. y —, y la ſuma, y diferencia, aſsi expreſſadas, ſeràn las raizes de la igualacion propueſta.

Exemplo en la primera igualacion.

$x2 - 8 : x + 14 \sqcap 0.$

En eſta primera igualacion, la mitad de 8. coeficiente de el caracter mediano es 4. ſi de ſu quadrado 16. ſe quitan 14. reſtan 2. que no tiene raiz quadrada juſta, pongaſele el ſigno radical de eſte modo V.2. y ſumandole, y reſtandole por medio de los ſignos +, y — con la mitad de el caracter mediano, que es 4. ſeran la ſuma, y diferencia las raizes de dicha igualacion, como ſe ſigue.

Suma.	4 + V.2.	Raiz mayor.
Diferencia.	4 — V.2.	Raiz menor.

Exemplo de la ſegunda, y tercera igualacion.

Segunda.	$x2 - 14 : x - 36 \sqcap 0.$
Tercera.	$x2 + 14 : x - 36 \sqcap 0.$

En eſtas igualaciones, la mitad de el coeficiente de el caracter mediano es 7. ſu quadrado 49. ſumado con 36. haze 85. que no es quadrado, luego ſu raiz ſe expreſſarà aſsi V.85. que ſumada, de el modo dicho, con el 7. darà la raiz, para la ſegunda igualacion; y reſtando de ella el 7. darà la raiz, que ſirve à la tercera igualacion.

Suma.	V.85 + 7.	Raiz mayor, para la ſegunda.
Diferencia.	V.85 — 7.	Raiz menor, para la tercera.

NOTA.

Si el coeficiente de el caracter mediano fuere numero impar, y ſe quiſiere evitar el quebrado: Quadreſe dicho coeficiente, de quien ſe reſtara el quadruplo de el numero, caracter menor, como en la primera igualacion, ò ſumeſe, como en la ſegunda, y tercera; y procediendo en lo demàs, como ſe ha dicho: la mitad de las raizes halladas darà ſatisfacion à la queſtion; ſirva de exemplo eſta igualacion.

x2 —

$$xx - 7:x + 10 \backsim 0.$$

El quadrado de 7. es 49. de quien restando 40. quadruplo de 10. quedan 9. su raiz es 3. que con 7. haze 10. duplo de la raiz mayor, y restada de 7. dà 4. duplo de la raiz menor.

Coeficiente.	7	
Raiz.	3	
Suma.	10	Su mitad 5. es raiz mayor.
Diferencia.	4	Su mitad 2. es la raiz menor.

§. III.

Exemplos de las tres igualaciones, sacadas de el Autor, y resueltos por la Methodo explicada.

EN el Libro V. cap. 5. question 3. fol. 231. propone el Autor la question siguiente.

Exemplo de la primera igualacion.

Hallar dos numeros, cuya suma 16. tenga con el producto de dichos numeros la razon de 1. à 3.

Hecha la Analysi concluye con esta igualacion.

$$vv. - 16:v. + 48 \backsim 0.$$

La que se resuelve por la regla dada de este modo: El coeficiente de el caracter mediano es 16. su mitad es 8. de cuyo quadrado 64. quitando 48. restan 16. cuya raiz quadrada 4. sumada, y restada con el 8. dà por raizes de la igualacion 12. y 4. como aqui se vè.

Mitad de el coeficiente.	8	
Raiz quadrada.	4	
Suma.	12	Raiz mayor.
Diferencia.	4	Raiz menor.

Exemplo de la segunda igualacion.

DE esta no trae exemplo el Autor, y assi propongo el siguiente.

Pidese vn numero, de cuyo quadrado quitando 24. tenga el residuo con el numero dado la razon de 2. à 1.

SEa el numero que se pide x. de cuyo quadrado x2. quitando 24. es el residuo x2 — 24. que con el numero supuesto x. ha de tener la razon de 2. à 1. Luego el producto de los extremos serà igual al de los medios, de este modo: x2 — 24 ⌒ 2: x. y ordenados los terminos serà la igualacion.

x2 — 2: x — 24 ⌒ 0.

La que se resuelve por la regla dada de este modo: El coeficiente de el segundo termino es 2. su mitad 1. cuyo quadrado 1. con 24. haze 25. la raiz quadrada de este es 5. que con 1. haze 6. raiz que satisface à la question.

Mitad de el coeficiente.	1	
Raiz hallada.	5	
Suma.	6	Raiz mayor positiva.
Diferencia.	4	Raiz menor negativa.

Exemplo de la tercera igualacion.

EN el citado lib. 5. cap. 5. question 5. fol. 232. propone el Autor la question siguiente.

Hallar dos numeros, cuya diferencia sea 8. y la suma de sus quadrados sea 104.

VEase el lugar citado, y se hallarà por resulta del Analysi la siguiente igualacion.

vv + 8: v — 20 ⌒ 0.

Que se resuelve, como la antecedente, quadrando el 4. mitad del coeficiente mediano, a cuyo quadrado 16. añadiendo 20. hazen 36. que tiene por raiz quadrada 6. de quien quitando 4. mitad del coeficiente mediano, restan 2. raiz menor que satisface la question; porque la suma da 10. raiz mayor, pero negativa.

Mi-

Mitad del coeficiente.	4	
Raiz hallada.	6	
Suma.	10	Raiz negativa.
Diferencia.	2	Raiz poſitiva.

§. IV.

De las igualaciones que alternan los caracteres.

QUando los caracteres no ſe ſiguen, ſegun el orden natural de ſus exponentes, ſi que alternan igualmente: las igualaciones de tres caracteres, ſe reſuelven por la regla general dada, como las antecedentes; pero con eſta diferencia, que ſi entre los caracteres falta vn caracter entre el mayor, y mediano, y otro entre eſte, y el menor; la raiz quadrada de las raizes halladas, darà la ſolucion que ſe deſea; pero ſi faltan dos caracteres, en la forma dicha: la raiz cubica de las raizes dichas, ſerà la que ſatisface la queſtion: y ſi faltan tres, la raiz quadrado-quadrada de dichas raizes, ſerà la que ſe deſea, y aſsi en las demàs.

Sirva de exemplo la igualacion, que nueſtro Autor pone en el lib. 5. cap. 4. fol. 222. exemplo 5. y cotegeſe la reſolucion ſiguiente, con la que alli ſe pone.

$$x4 - 20 : xx + 64 \backsim 0.$$

Aqui falta entre el quadrado-quadrado x4. y el quadrado xx. el cubo x3. y entre eſte, y el numero, falta la x. eſta ſe reſuelve, como la primera igualacion de las antecedentes, como ſino huviera tal alternacion de caracteres, del modo ſiguiente.

La mitad de 20. coeficiente del caracter mediano, es 10. de cuyo quadrado 100. quitando 64. reſtan 36. ſu raiz quadrada 6. ſumada, y reſtada con el 10. mitad del coeficiente del caracter mediano, dà por raizes 16. y 4. cuyas raizes quadradas 4. y 2. (por alternar los caracteres, omitiendo vno) ſatisfacen la queſtion.

Mitad del coeficiente.	10	
Raiz hallada.	6	
Suma raiz mayor.	16	Su raiz quadrada 4.
Diferencia raiz menor.	4	Su raiz quadrada 2.

Son, pues, las raizes de dicha igualacion 4. y 2.

Otro Exemplo.

EN el lib. 6. cap. 1. question 7. fol. 255. se halla la siguiente igualacion.

$-y6 + 576: y3 - 32768 \sqcap 0.$

Que mudando los signos en sus opuestos, viene à reducirse à la especie de la primera igualacion de este modo.

$y6 - 576: y3 + 32768 \sqcap 0.$

En esta igualacion faltan entre y6. y y3. los dos caracteres y5. y y4. y entre y3. y el numero, faltan y2. y y. con que segun nuestra regla, las raizes cubicas de las raizes, seran las que se desean.

La mitad de 576. es 288. de cuyo quadrado 82944. quitando 32768. restan 50176. su raiz quadrada es 224. que sumada, y restada con 288. darà 512. y 64. cuyas raizes cubicas 8. y 4. satisfacen la propuesta.

Mitad de el coeficiente.	288		
Raiz quadrada.	224		
Suma.	512	Su raiz cubica	8.
Diferencia.	64	Su raiz cubica	4.

De el mismo modo se resuelven las igualaciones alternantes, que corresponden à la segunda, y tercera.

Ruego al curioso Lector no juzgue es mi intencion reprehender à nuestro doctissimo Autor, ni a los insignes Autores à quien sigue, sì solo facilitar estas operaciones, bastantemente dificiles à los poco exercitados.

Las Methodos que trae el Autor en los Libros IV. y V. pueden servir à la resolucion de las igualaciones cubicas, mientras no se halla otra mejor.

LI-



LIBRO VI.

DE LA ANALYSI COMPUESTA; quando concurren en las igualaciones diferentes magnitudes incognitas.

LA materia de este libro es la Analysi, ò resolucion de las questiones, en cuyas igualaciones concurren diferentes magnitudes incognitas, elevadas à diversos grados. El vnico medio para conseguir esta resolucion consiste en excluir las incognitas, hasta dexar vna sola en la igualacion: esto en muchas se consigue por las substituciones explicadas en el libro 3. cap. 2. y en el libro 5. Prop. 3. en otras es menester partir la igualacion por vn partidor comun à todos los terminos, en quienes se halla la incognita; pero si aviendo aplicado estos medios, quedaren aun en la igualacion algunas incognitas, sin averse podido excluir, serà señal ser aquellas questiones indeterminadas; y en tal caso substituyendo qualquiera numero en lugar de las incognitas, que no se pudieron excluir, se hallarà la resolucion que se pretende.

CAPITULO I.

DE LA ANALYSI DE LAS QUESTIONES COMPUESTAS determinadas, donde concurren diferentes incognitas.

REGLA I.

LA Regla 1. para resolver estas questiones viene à ser la misma que se diò en el lib. 1. cap. 2. para las questiones

tiones lineares, que consiste vnicamente en el orden, y concierto de hazer las substituciones de vnas cantidades en lugar de otras; solo añade el trabajo de averse de formar las potestades de las magnitudes, para substituirlas en lugar de las que obtienen en las igualaciones las incognitas. La regla se reduce à lo siguiente.

Supongase llanamente en la forma acostumbrada vna de las vltimas letras del Abecedario por cada magnitud incognita, y sigase con ellas el tenor de la question, formando las igualaciones que fueren menester, segun la propuesta. Procurese despejar en vna de ellas vna incognita, de suerte, que quede sola en la vna parte de la igualacion: hecho esto, se substituirà su valor en la otra igualacion, para excluir de ella dicha incognita: esto se continuarà en las demàs igualaciones que concurrieren, hasta que se llegue à vna, en quien no quede mas de vna incognita, con que se lograrà la resolucion por las reglas que se han dado, como se vè en las questiones siguientes, de las quales vienen muchas à reducirse à lineares con el sobredicho artificio.

QUESTION I.

Hallar dos numeros tales, que su suma sea 4. y la diferencia de sus quadrados sea 8.

SUpongo, que los numeros que se piden son t. v. y expressarè la question en las dos igualaciones siguientes.

$$t + v \propto 4.$$

$$tt - vv \propto 8.$$

En la primera igualacion hallo $t \propto 4 - v$. y substituyendo $4 - v$. en lugar de t. en la segunda igualacion: esto es, el quadrado de $4 - v$. en lugar de tt. resulta $16 - 8v + vv - vv \propto 8$. luego $8v \propto 8$. luego $v \propto 1$. y siendo $t \propto 4 - v$. serà $t \propto 3$. son, pues, 1.3. los numeros que se piden.

QUESTION II.

Hallar dos numeros con estas condiciones, que su suma sea 6. y que la suma de sus cubos sea igual à 18. quadrados de uno de los dichos numeros.

SEa el vn numero t. y el otro v. y la igualacion se expressarà en las igualaciones siguientes.

t +

$$t + v \backsim 6.$$

$$t^3 + v^3 \backsim 18vv.$$

En la primera ſe halla $t \backsim 6 - v.$ y ſubſtituyendo $6 - v.$ en lugar de $t^3.$ ſe hallarà $216 - 108v + 18vv - v^3. + v^3. \backsim 18vv.$ que ſe reduce à la ſiguiente, $216 - 108v \backsim 0.$ luego $v \backsim 2.$ luego $6 - v \backsim 4.$ y queda reſuelta la queſtion con los numeros 2.4.

QUESTION III.

Pidenſe dos numeros tales, que la ſuma del quadrado del primero con el quadruplo del ſegundo ſea 40. y la del quadrado del ſegundo con el numero primero, ſea tambien 40.

EL primer numero ſea v. y el ſegundo y. y ſiguiendo la queſtion ſe formaràn las dos igualaciones ſiguientes.

$$vv + 4y \backsim 40.$$

$$yy + v \backsim 40.$$

Deſpejando la v. en la igualacion ſegunda, ſe halla $v \backsim 40 - yy.$ ſubſtituyendo eſte valor de v. en la igualacion primera, reſulta la igualacion ſiguiente, ordenados los terminos $y^4. * - 80yy + 4y + 1560 \backsim 0.$ y vſando de las reglas del libro antecedente, ſe halla $y \backsim 6.$ y ſiendo $v \backsim 40 - yy.$ ſerà $v \backsim 40 - 36.$ eſto es, $v \backsim 4.$ y queda ſatisfecha la queſtion con vna de las raizes poſitivas, ò valores de y. hallando las otras tres raizes, ſe hallarian otras tantas ſoluciones, porque cada vna daria diſtinto valor à la v. pero ſe hallaràn ſer irracionales en el exemplo propueſto.

QUESTION IV.

Pidenſe tres numeros, que tengan las quatro condiciones ſiguientes.

1. *QUe la ſuma del cubo del primero, quadrado del ſegundo, y el numero tercero, ſea 30.*

2. *Que el cubo del ſegundo, con el quadrado del primero, y el numero tercero, ſea 74.*

3. *El cubo del tercero con el quadrado del ſegundo, y el numero primero, haga 234.*

4. *Que*

4. Que el numero segundo, restado del quadrado del tercero, haga el residuo 32.

Supongo sean los tres numeros que se piden ſ. t. v. y se expressaran las quatro condiciones de la question en las quatro igualaciones siguientes.

Primera.	$s^3. + tt + v \backsim 30.$
Segunda.	$t^3. + ss + v \backsim 74.$
Tercera.	$v^3. + tt + s \backsim 234.$
Quarta.	$vv. - t \backsim 32.$

Segun la vltima es $t \backsim vv - 32.$ y substituyendo este valor de t. en la tercera igualacion, serà $v^4. + v^3. - 64vv + 1024 + s \backsim 234.$ y vsando de la Antithesi, serà la igualacion $v^3 + v^4. - 64vv + 790 + s \backsim 0.$ luego $s \backsim 64vv - v^4. - v^3. - 790.$ son, pues, los valores de t. y de ſ. como se siguen.

$$t \backsim vv - 32.$$
$$s \backsim 64vv - v^4. - v^3. - 790.$$

Substituyendo aora en la segunda igualacion de las primeras el valor de t. y el de ſ. en lugar de estas incognitas, resultarà vna igualacion, donde se hallarà solamente la v. elevada à diferentes grados, que quitado lo superfluo, y ordenados sus terminos para la resolucion, es $v^8. + 2v^7. - 126v^6. - 128v^5. + 5612v^4 + 1580v^3. - 48048vv + 1v + 591332 \backsim 0.$ Resuelvase por nuestras reglas, y se hallarà ser $v \backsim 6.$ substituyendo, pues, 6. en lugar de v. en las igualaciones $t \backsim vv - 32.$ $s \backsim 64vv.$ &c. se hallarà $s \backsim 2.$ $t. \backsim 4.$ que satisfacen la question.

Hallando los demàs valores de v. en la igualacion misma $v^8. - 2v^7.$ *&c. se hallaràn las demàs respuestas, que se pueden dar à la question, de que tratarè en el cap. 3. por necessitarse regularmente de la methodo, que alli propongo, para assegurar, y facilitar el acierto.*

QUESTION V.

Multiplicar dos magnitudes dadas (por exemplo 8. 2.) por vna tal magnitud, que el primer producto sea vn quadrado que tenga por lado, ò raiz al segundo producto.

SUpongo sea z. el numero que ha de multiplicar al 8. y al 2. y que sea y. el lado del quadrado, que ha de ser igual

igual al primer produɛto; y ſiguiendo la queſtion, ſeràn los produɛtos $8z.$ $2z.$ y porque $8z.$ ſe ſupone ſer el quadrado de $y.$ ſerà $yy \propto 8z.$ igualacion primera; y porque el ſegundo produɛto $2z.$ ha de ſer el lado de dicho quadrado, ſerà $y \propto 2z.$ igualacion ſegunda: luego quadrando entrambas partes de eſta igualacion, ſerà $yy \propto 4zz.$ con que tenemos las dos igualaciones ſiguientes.

$$yy \propto 8z.$$
$$yy \propto 4zz.$$

Siendo, pues, tanto $8z.$ como $4zz.$ iguales a $yy.$ ſeràn iguales entre sì; con que ſerà $8z \propto 4zz.$ y ſin otra diligencia queda excluìda la incognita $y.$ Partiendo, pues, entrambas partes por $z.$ ſerà $8 \propto 4z.$ luego $z \propto 2.$ que es el numero que ſe pide.

REGLA II.

QUando en las igualaciones ſe hallan diferentes incognitas multiplicadas entre sì ſe procurarà vèr ſi en alguna de dichas igualaciones, ſe hallan las incognitas ſin multiplicarſe; y en eſte caſo nos valdrèmos de eſta igualacion para deſpejar vna de las incognitas, dexandola ſola, y en vna ſola parte de la igualacion, lo que ſe conſigue por la Antitheſi, como haſta aqui ſe ha hecho. Deſpues ſe ſubſtituirà eſte valor hallado de la incognita en lugar ſuyo en las demàs igualaciones, donde ſe hallare, multiplicandola por los miſmos caraɛteres, por quienes ſe halla multiplicada dicha incognita, con lo qual quedarà excluìda de las igualaciones, como ſe pretende, para poderſe hazer la reſolucion por las reglas generales, como ſe vè en la queſtion ſiguiente.

QUESTION VI.

Dada la ſuma 12. de dos magnitudes; y la ſuma 124. del produɛto, y de los quadrados de las miſmas magnitudes, hallar las magnitudes.

SEan las magnitudes que ſe ignoran $v.$ $y.$ y ſiguiendo la propueſta, ſerà la primera igualacion $v + y \propto 12.$

y

y la ſegunda ſerà $vy + vv + yy \propto 124$. Deſpejando la incognita v. en la primera, ſerà $v \propto 12 - y$. ſubſtituyendo eſte valor de v. en lugar ſuyo en la igualacion ſegunda, ſerà, quitado lo ſuperfluo, $- yy + 12y - 20 \propto 0$. que ſe reſolverà por el libro antecedente, y ſe hallaràn los dos numeros que ſe piden, 2. 10.

Pero ſi en todas las igualaciones, que ſe huvieren hecho, ſegun el tenor de la queſtion, ſe hallaren multiplicadas las incognitas vnas por otras, ſe partiràn los terminos de entrambas partes de la igualacion, por vn miſmo partidor tal, que hecha la particion, venga el quociente à dàr vna incognita deſpejada, de ſuerte, que hallandoſe ſola en la vna parte de la igualacion, no ſe halle en la otra; con eſto ſe tendrà vn valor de aquella incognita, que ſe ſubſtituirà en lugar ſuyo en las demàs igualaciones: eſto miſmo ſe continuarà haſta que ſolamente quede vna incognita, excluìdas las demàs; y ſe pueda reſolver la queſtion por las reglas ordinarias, como ſe vè en las ſiguientes. Quando las igualaciones fueren muy largas, ſerà mejor valerſe de la regla 3. que daremos en el cap. 3.

QUESTION VII.

Dado el producto 32. de dos magnitudes, y la ſuma 576. de ſus cubos, hallar las magnitudes.

LOs numeros incognitos que ſe piden, ſean x. y. y ſerà ſegun la queſtion $xy \propto 32$. igualacion primera: $x^3 + y^3 \propto 576$. igualacion ſegunda: luego deſpejando la x. en la primera, ſerà $x \propto \frac{32}{y}$. ſubſtituido eſte valor de x. en lugar ſuyo en la ſegunda igualacion, ſerà $\frac{32768}{y^3} + y^3 \propto 576$. y quitado el quebrado, ſerà $32768 - y^6 \propto 576y^3$. donde queda yà excluìda la incognita x. Ordenada eſta igualacion, para reſolverla por el libro paſſado, es $- y^6 * . * + 576y^3 * . * - 32768 \propto 0$. y ſe hallaràn los numeros que ſe piden 8. 4.

QUES-

QUESTION VIII.

Hallar tres magnitudes tales, que el produƈto de las dos primeras tenga con la ſuma de las miſmas, la razon de 3. con 1. Que el produƈto de la primera, y tercera con ſu ſuma, tenga la razon de 4. con 1. y que el produƈto de la ſegunda, y tercera, con la ſuma de ellas miſmas, tenga la razon de 5. con 1.

SEa la primera z. la ſegunda y. y la tercera t. y porque el plano de las dos primeras zy. con la ſuma $z + y$. es como 3. con 1. ſerà el produƈto de los extremos igual al de los medios: eſto es, $zy \backsim 3z + 3y$. y por Antitheſi $zy - 3z \backsim 3y$. y partiendo entrambas partes por $y - 3$. quedarà $z \backsim \frac{3y}{y-3}$. Tambien porque el plano zt. y la ſuma $z + t$. de ſus lados, ſon como 4. con 1. El produƈto de los extremos con el de los medios harà la igualacion $zt \backsim 4z + 4t$. luego $zt - 4z \backsim 4t$. y partiendolo todo por $t - 4$. reſultarà $z \backsim \frac{4t}{t-4} \backsim \frac{3y}{y-3}$. y hecha la multiplicacion de eſta igualacion vltima por los denominadores, ſaldrà la igualacion $4yt - 12t \backsim 3yt - 12y$. luego $12y + 4yt - 3yt \backsim 12t$. luego $12y + yt \backsim 12t$ y partiendolo todo por $12 + t$. ſerà $y \backsim \frac{12t}{12+t}$. Aſsimiſmo porque el plano yt. con la ſuma $y + t$. de ſus lados, ſon como 5. con 1. el produƈto de los extremos con el de los medios, harà la igualacion $yt \backsim 5y + 5t$. luego $yt - 5y \backsim 5t$. y partiendolo todo por $t - 5$. ſerà $y \backsim \frac{5t}{t-5} \backsim \frac{12t}{12+t}$. quitados los quebrados por la regla ordinaria, reſulta $120t \backsim 7tt$. luego $120 \backsim 7t$. luego $t \backsim \frac{120}{7}$. ſubſtituyaſe eſte valor en las igualaciones $z \backsim \frac{4t}{t-4}$. $y \backsim \frac{5t}{t-5}$. y ſe hallarà $z \backsim \frac{840}{161}$. $y \backsim \frac{840}{119}$. y con eſtas magnitudes queda reſuelta la queſtion. De la miſma ſuerte ſe reſolverà la ſiguiente.

Ha-

Hallar tres magnitudes tales, que el plano de las dos primeras, con la ſuma de las tres, tenga la razon de tres con 1. y el plano de la primera, y tercera ſea con la ſuma de las tres, como 5. con 1. y el plano de la ſegunda, y tercera, con la ſuma de las tres; ſea como 4. con 1.

QUESTION IX.

Dada la ſuma 84. de los quadrados de tres terminos proporcionales; y conocido el termino medio, (por exemplo 4.) hallar los extremos.

SEan los extremos que ſe piden r. v. y ſeràn los tres proporcionales r. 4. v. luego el producto de los extremos ſerà igual al quadrado del medio $rv \frown 16$. luego $r \frown \frac{16}{v}$. con que queda excluìda la r. y ſon los tres $\frac{16}{v}$. 4. v. y como ſegun la propueſta, ſea la ſuma de ſus tres quadrados igual à 84. ſerà $\frac{256}{vv} + 16 + vv \frown 84$. luego $\frac{256}{vv} + vv \frown 68$. y quitado el quebrado es $256 + v4 \frown 68vv$. y por Antitheſi $256 \frown 68vv - v4$. Ordenados todos los terminos en la vna parte de la igualacion, hazen $- v4 * + 68vv * - 256 \frown 0$. Reſolviendo eſta igualacion por el lib. anteced. ſe halla ſer 2. el valor de v. con que el primer termino de los proporcionales que ſe piden es $\frac{16}{v} \frown 8$. y ſon los tres 8. 4. 2. Aſsimiſmo ſe reſolverà la queſtion ſiguiente.

Dada la ſuma de los quadrados de tres terminos proporcionales; y el vno de los extremos, hallar los otros dos terminos.

QUESTION X.

Conocida la ſuma 18. de los extremos; y la ſuma 12. de los medios en quatro continuos proporcionales Geometricos, hallar los terminos.

SEa el primer termino v. y el ſegundo y. ſiendo, pues, la ſuma del ſegundo, y tercero 12. ſerà el tercero $12 - y$. y por ſer la ſuma del primero, y vltimo 18. ſerà el

el vltimo $18 - v$. son, pues, los quatro proporcionales.

$$v. \quad y. \quad 12 - y. \quad 18 - v.$$

Y por ser continuos proporcionales, serà el producto del primero, y tercero, igual al quadrado del segundo; con que es la primera igualacion $12v - yv = yy$. Por la misma razon serà el producto del segundo, y quarto, igual al quadrado del tercero; y serà la segunda igualacion $42y - vy - yy = 144$. Para excluir la incognita v. en la primera igualacion; parto entrambas partes por $12 - y$. y el quociente es la igualacion $v = \frac{yy}{12 - y}$. Substituyendo este valor de v. en lugar de v. en la segunda igualacion; y quitado lo superfluo, resulta $-yy + 12y - 32 = 0$. Resuelvase por el libro antecedente; y se hallarà ser $y = 8$. y siendo $v = \frac{yy}{12 - y}$. serà $v = 16$. y aviendo supuesto ser el tercer termino $12 - y$. serà 4. y el quarto $18 - v$. serà 2. con que son los proporcionales que se piden 16. 8. 4. 2. De esta suerte se resolveràn las questiones siguientes.

Conocida la diferencia de los extremos, y la de los medios, hallar los quatro terminos continuos proporcionales.

Dada la suma de los extremos de vna progression Geometrica de quatro terminos, y el producto, ù de los medios, ù de los extremos, hallar cada termino.

Conocida la diferencia de los extremos, y su producto; hallar cada vno de los quatro terminos de la progression.

QUESTION XI.

Dado el producto 320. de la suma de dos magnitudes, por la suma de sus quadrados; y dado otro producto 128. de la diferencia de las mismas magnitudes, multiplicada por la diferencia de los quadrados, hallar las magnitudes.

Esta question, y otras semejantes, se resuelven con mas facilidad, planteandolas por la regla dada en el cap. 6. del lib. 5. Pongase, pues, 2v. en lugar de la suma de las magnitudes; y notese su diferencia con 2y. Segun esto, la mayor serà $v + y$. y la menor $v - y$. La suma de los qua-

pados de eſtas magnitudes es $2vv + 2yy$. y ſu diferencia es $4vy$. El producto de la ſuma $2v$. por la de ſus quadrados $2vv + 2yy$. es conocido; y aſsi le ſeñalo con $4b$. para evitar quebrados: es, pues, la igualacion $4v^3 + 4vyy \propto 4b$. luego $v^3 + vyy \propto b$. Tambien porque el producto de la diferencia $2y$. por la diferencia $4vy$. es conocido le noto con $8c$. por eſcuſar quebrados: y es la otra igualacion $8vyy \propto 8c$. luego $vyy \propto c$. Reſteſe eſta ſegunda igualacion de la primera, cada parte de ſu correſpondiente: eſto es, vyy. de $v^3 + vyy$. como tambien c. de b. y ſe hallarà $v^3 \propto b - c$. eſto es, $v^3 \propto 64$. y ſacando la raiz cubica de entrambas partes, ſerà $v \propto 4$. y porque antes ſe hallò $vyy \propto c$. ſerà $yy \propto \frac{c}{v}$. eſto es, $yy \propto 4$. luego $y \propto 2$. luego la cantidad mayor $v + y \propto 6$. y la menor $v - y \propto 2$. y queda ſatisfecha la queſtion.

QUESTION XII.

Hallar tres magnitudes tales, que el producto de las dos primeras por la tercera ſea 27. El producto de la primera, y tercera por la ſegunda ſea 32. y el producto de la ſegunda, y tercera por la primera ſea 35.

SUpongo ſean los numeros ſ. v. x. y las tres condiciones de la queſtion ſe expreſſaràn en las tres igualaciones, que ſe vèn en la primera claſe de direccion. Deſpejando la x. en la primera, partiendolo todo por $ſ + v$. ſe halla $x \propto \frac{27}{ſ + v}$ que pongo en la columna del retorno; y ſubſtituyendo eſte valor en lugar de x. en las otras dos igualaciones de la direccion, reſultan las dos que ſe ven en la ſegunda claſe de la miſma columna. Para mayor brevedad reſto la primera de eſtas dos igualaciones, que es la menor, de la ſegunda, que es la mayor, y es el reſiduo la igualacion $\frac{27ſ - 27v}{ſ + v} \propto 3$. que quitado el quebrado es $27ſ - 27v \propto 3ſ + 3v$. y por Antitheſi $24ſ \propto 30v$. luego $4ſ \propto 5v$.

y.

y partiendolo todo por 4. es $s = \frac{5v}{4}$ que pongo en la columna del retorno.

Aora ſe ha de ſubſtituir eſte valor de ſ. en la primera igualacion de la ſegunda claſe de direccion; pero antes le quito el quebrado, y ſale $vss + vvs - 32s = 5v$. Hecho eſto, ſubſtituyo en eſta igualacion el valor de ſ. que ſe puſo en la columna del retorno, y ſerà $\frac{25.v3.}{16} + \frac{5v3.}{4} - \frac{160v}{4} = 5v$. donde yà no ſe halla otra incognita que la v. Quitados los quebrados, y rebaxados por igual los caracteres vn grado, es $180vv - 2560 = 320$. y por Antitheſi $180vv = 2880$. luego $vv = 16$. luego $v = 4$. que pongo en la columna del retorno: conocido el valor de v. ſe ſaben todos los demas, ſubſtituyendo 4. en lugar de v. en las demas igualaciones del retorno; con que ſe forma la columna final de los tres valores conocidos, que ſon 5.4.3.

$sx + vx = 27.$	$v = 4.$
$vs + vx = 32.$	$s = \frac{5v}{4}$
$vs + xs = 35.$	$x = \frac{27}{s+v}$
$vs + \frac{27v}{s+v} = 32.$	$s = 5.$
$vs + \frac{27s}{s+v} = 35.$	$v = 4.$
	$x = 3.$

CAPITULO II.

DE LA ANALYSI DE LAS QUESTIONES COMPUESTAS indeterminadas, donde concurren diferentes incognitas.

EStas queſtiones ſe reſuelven como las antecedentes, ſolo, que en lugar de las incognitas que no ſe pudiere,

ren excluir, se podràn suponer arbitrariamente qualesquiera cantidades, con que se daràn innumerables satisfaciones, como arriba dixe.

QUESTION XIII.

Hallar dos magnitudes conmensurables tales, que la suma de ellas con la de sus quadrados, sea como 1. con 10.

SEa la primera magnitud z. y para que la segunda sea conmensurable con la primera, supongo sea zy. Supongo tambien a. en lugar de 1. como b. en lugar de 10. Siguiendo, pues, la question, seràn quatro proporcionales $z + zy.\ zz + zzyy :: a.\ b.$ luego el producto de los extremos es igual al de los medios.

$$bz + bzy \propto azz + azzyy.$$

Partiendo la igualacion por el mayor partidor; que por la Prop. 20. lib. 1. es $az + azyy$. resulta $z \propto \frac{bz + bzy}{az + azyy}$. Y reduciendo el quebrado, partiendo el numerador, y denominador por z. serà $z \propto \frac{b + by}{a + ayy}$. y no aviendo mas condiciones en la question, queda la y. sin poderse exterminar; con que es arbitraria, ò indeterminada; y qualquiera numero, que por ella se suponga, darà tal valor à la z. que quedarà satisfecha la question.

Supongamos por exemplo, que la y. sea 2. serà $z \propto 6$. con que zy. serà 12. son, pues, los numeros 6. 12. cuya suma es 18. y la de sus quadrados, 180. que son como 1. con 10.

Supongo otra vez, que la y. sea 3. se hallarà $z \propto 4$. con que zy. serà 12. son, pues, los numeros 4. 12. cuya suma es 16. y la de sus quadrados 160. que son como 1. con 10. y assi infinitamente. Con este mismo estilo se resolveràn las questiones siguientes.

Hallar dos magnitudes conmensurables, cuya suma con la diferencia de sus quadrados, tenga la razon que dos magnitudes dadas.

Hallar dos magnitudes conmensurables, cuya diferencia tenga con la de sus quadrados vna razon dada.

Hallar

Hallar dichas magnitudes, cuya diferencia tenga con la suma de sus quadrados vna razon dada.

QUESTION XIV.

Divir la suma de dos quadrados perfectos, en otros dos quadrados perfectos.

Pidese, que el numero 117. que es suma de los quadrados perfectos 81.36. se divida en otros dos numeros, que tambien sean quadrados perfectos.

Operacion. Supongo, que el lado 9. del quadrado mayor de los conocidos es a. y que 6. lado del menor, es b. y porque necessariamente el lado de vno de los quadrados incognitos que se buscan, ha de ser menor que el lado a. y el otro mayor que el lado b. como se puede demonstrar Geometricamente; supongo sea el primero a — v. y que el segundo sea rv — b. Los quadrados de estos lados son aa — 2av + vv. rrvv + 2brv + bb. cuya suma se supone igual à la suma conocida aa + bb. y hecha la transposicion, se hallarà la igualacion vv + rrvv ∽ 2av + 2rbv. y partiendolo todo por v. serà v + rrv ∽ 2a + 2br. y partiendo esto vltimo por 1 + rr. serà v ∽ $\frac{2a + 2br}{1 + rr}$. Y por ser la magnitud r. arbitraria, tendrà la question infinitas respuestas, suponiendo por r. qualquiera numero.

Exemplo. Supongamos que r. sea 3. y serà el lado del primer quadrado a — v ∽ 3. y seis dezimas; y el del segundo rv — b ∽ 10. y dos dezimas; cuyos quadrados son, el primer 12. y 96. centesimas; y el segundo 104. y 4. centesimas, que son quadrados perfectos, y sumados hazen 117. como se deseaba. Lo mismo serà substituyendo otro qualquier numnro en lugar de r.

QUESTION XV.

Hallar dos quadrados perfectos; cuya diferencia sea 17.

Supongo, que el lado del quadrado menor sea r. y el del mayor sea r + y. y sea d ∽ 17. El excesso en que el

el quadrado mayor $rr + 2ry + yy$. excede al menor rr. es $2ry + yy \propto d$. luego $2ry \propto d - yy$. Partase todo por $2y$. y serà $r \propto \frac{d - yy}{2y}$. con que la y. es arbitraria por no poderse excluir; y se podrà tomar por ella qualquier numero; pero que su quadrado sea menor que d. para que se pueda restar, como lo manifiesta $d - yy$. Supongo, pues, por exemplo sea $y \propto 1$. y se hallarà $r \propto 8$. lado del quadrado menor: $r + y \propto 9$. lado del mayor; y la diferencia de sus quadrados 81. y 64. es 17. como se pide.

QUESTION XVI.

Dividir vna magnitud dada en dos partes, que multiplicando la vna por la otra, sea el producto vn quadrado perfecto.

SEa la magnitud dada $2a$. y la diferencia de sus dos partes sea $2y$. segun lo dicho en el cap. 6. del libro antecedente; y la magnitud mayor serà $a + y$. y la menor $a - y$. cuyo producto serà $aa - yy$. Y para que este plano sea vn quadrado perfecto, tomo para lado suyo vna magnitud, en quien se halle la incognita y. multiplicada por otra incognita; y el producto se niegue de la a. ò al contrario, la a. se niegue de dicho producto, para que con esto la igualacion que resultare, se pueda facilmente resolver.

Supongo, pues, que el lado de este quadrado que se busca, es $zy - a$. multiplicandole por sì mismo resultarà su quadrado igual al plano, ò producto hallado arriba, con que serà la igualacion $zzyy - 2azy + aa \propto aa - yy$. Y vsando de la Antithesi, serà $2azy \propto zzyy + yy$. y partiendolo todo por y. serà $2az \propto zzy + y$. y partiendo otra vez esto vltimo por el mayor partidor del miembro segundo, que es $zz + 1$. se halla $y \propto \frac{2az}{zz + 1}$. con que la question es indeterminada, y qualquiera numero mayor que la vnidad, supuesto por la z. dara su valor à la y. y se resolverà la question.

Sea,

Sea, pues, por exemplo, la magnitud dada 10. ſea tambien $z \propto 2$. con que $y \propto \frac{2az}{zz + 1}$ ſerà $y \propto 20$. quintos: eſto es $y \propto 4$. luego $a + y \propto 9$. y $a - y \propto 1$. Son, pues, los numeros 9. 1. que ſumados hazen 10. y multiplicados, hazen el numero quadrado 9. y aſsi ſe pueden dàr otras reſoluciones.

QUESTION XVII.

Hallar dos magnitudes, que la vna, junta con el quadrado de la otra, haga vn quadrado, cuyo lado ſea la ſuma de entrambas.

Las magnitudes que ſe piden, ſean r. t. ſigaſe la propueſta; y ſe hallarà la igualacion $rr + t \propto rr + 2rt + tt$. luego $1t - tt \propto 2rt$. y partiendolo todo por t. es $1 - t \propto 2r$. luego $r \propto \frac{1 - t}{2}$. donde la t. es arbitraria, y menos que 1.

Supongo, por exemplo, ſea $t \propto \frac{1}{2}$. con que r. ſerà vn quarto: luego $rr + t \propto \frac{9}{16}$. cuya raiz quadrada es $\frac{3}{4}$. igual à la ſuma de entrambas magnitudes. Con el miſmo eſtilo ſe reſolveràn otras queſtiones.

QUESTION XVIII.

Hallar dos magnitudes tales, que ſumando cada vna con el quadrado de la otra, ſean las ſumas dos quadrados perfectos.

Aviendo nombrado la primera r. y la ſegunda y. ſe tomarà $r + x$. para lado del primer quadrado; y $v - y$. ò $y - v$. para lado del ſegundo; con que el primer o ſerà $rr + 2rx + xx$. el qual quadrado, ſera ſegun la propueſta, igual con $rr + y$. es, pues, $rr + y \propto rr + 2rx + xx$. y deſpejando la igualacion, ſe hallarà $y \propto 2rx + xx$. primer valor de y. Proſiguiendo ſegun la propueſta, ſerà $r + yy \propto vv - 2vy + yy$. que es el quadrado ſegundo; y

vſando dela Antitheſi, ſera $2vy \propto vv - r$. y partiendolo todo por $2v$. ſerà $y \propto \frac{vv - r}{2v}$. luego $\frac{vv - r}{2v} \propto 2rx + xx$. que es el primer valor de y. hallado antes: y multiplicandolo todo por el denominador, ſerà $vv - r \propto 4vrx + 2vxx$. luego $4vrx + r \propto vv - 2vxx$. luego $r \propto \frac{vv - 2vxx}{4vx + 1}$. Donde ſe vè ſer las dos incognitas v. x. arbitrarias; pero v. excede à $2xx$.

Sea por exemplo $v \propto 3$. $x \propto 1$. y ſerà $r \propto \frac{3}{13}$. $y \propto \frac{19}{13}$. que ſatisfacen la queſtion, porque la ſuma del primero, con el quadrado del ſegundo, es $\frac{400}{169}$. y la del ſegundo, con el quadrado del primero, es $\frac{256}{169}$. que ſon quadrados perfectos.

QUESTION XIX.

Hallar dos magnitudes tales, que añadiendo à cada vna, y à ſu ſuma vn quadrado dado, ſea cada vna de las tres ſumas vn quadrado perfecto.

SEa la primera z. la ſegunda y. ſea a. el lado del quadrado dado; y ſeràn las tres ſumas $z + aa$. $y + aa$. $z + y + aa$. cada vna de las quales ha de ſer vn quadrado perfecto; con que ſerà meneſter, como en la queſtion anteced. valernos de otras incognitas a mas de las ſupueſtas. Supongo, pues, que $a + x$. es el lado del quadrado primero; $a + v$. el lado del ſegundo; con que el quadrado primero ſerà $aa + 2ax + xx$. y ſerà la primera igualacion $z + aa \propto aa + 2ax + xx$. luego $z \propto 2ax + xx$. el quadrado ſegundo es $aa + 2av + vv$. y ſerà la ſegunda igualacion $y + aa \propto aa + 2av + vv$. luego $y \propto 2av + vv$. Aora, porque la tercera ſuma $z + y + aa$. ha de ſer tambien vn quadrado perfecto; para hazer mejor eſta tercera igualacion, ſubſtituyo en la ſobredicha ſuma los valores hallados de z.

y.

y. con que ſerà $2ax + xx + 2av + vv + aa$. y porque ha de ſer vn quadrado, ſupongo ſea ſu lado $t - x$. y ſerà la tercera igualacion $tt - 2tx + xx \propto 2ax + xx + 2av + vv + aa$. y por Antitheſi ſerà $2ax + 2tx \propto tt - vv - 2av - aa$. Aora ſe ha de deſpejar la x. en el primer miembro lo que ſe conſigue, partiéndole por $2a + 2t$. Parto, pues, por eſte partidor la igualacion, y reſulta $x \propto \frac{tt - vv - 2av - aa}{2a + 2t}$. con que las incognitas t. v. ſon arbitrarias; pero t. ha de ſer mayor que $a + v$. para que del quadrado tt. ſe puedan reſtar los planos, ò productos que expreſſa el denominador.

Sea, por exemplo, $a \propto 1$. ſea $v \propto 1$. ſea $t \propto 4$. y ſe hallaràn $x \propto 6$. quintos: $z \propto 96$. veinte y cinco avos; $y \propto 3$. que ſatisfacen la queſtion; porque añadiendo à los 96. veinte y cinco avos, la vnidad, ò 25. veinte y cinco avos, es la ſuma 121. veinte y cinco avos, y añadiendo al 3. la miſma vnidad, reſultan 4. y ſumando 96. veinte y cinco avos con 3. eſto es, con 75. veinte y cinco avos, y con la vnidad, reſultan 196. veinte y cinco avos, que todos tres ſon quadrados perfectos.

QUESTION XX.

Hallar tres quadrados perfectos tales, que el exceſſo del primero al ſegundo, tenga con el exceſſo del ſegundo al tercero la razon de vna magnitud dada, à otra.

SUpongo, que el lado del quadrado medio ſea z. y que el del mayor ſea $z + y$. y el del menor $z - r$. El exceſſo del primer quadrado $zz + 2zy + yy$. ſobre el ſegundo zz. es $2zy + yy$. El exceſſo del ſegundo zz. ſobre el tercero $zz - 2zr + rr$. es $2zr - rr$. y ſiendo el primer exceſſo al ſegundo, como c. con d. ſerà la proporcion.

$$2zy + yy.\quad 2zr - rr :: c.\ d.$$

Luego el producto de los extremos es igual al de los medios: eſto es, $2dzy + dyy \propto 2crz - crr$. luego $2crz - 2dyz \propto crr + dyy$. luego $z \propto \frac{crr + dyy}{2cr - 2dy}$. Donde las y. r.

ſon

ſon arbitrarias; pero la y. ha de exceder al ſiguiente producto $\frac{r}{d} \sqrt{(cd + dd)} - r$.

Por exemplo, ſea $c \backsim 3$. $d \backsim 1$. Sea $r \backsim 1$. $y \backsim 2$; y ſe hallarà $z \backsim 7$. medios, conque los tres lados de los quadrados ſon $z + y \backsim 11$. medios: $z \backsim 7$. medios: $r \backsim 5$. medios, que ſatisfacen la queſtion, como ſe puede probar, porque ſe hallaràn ſer los quadrados 121. quartos, 49. quartos, 25. quartos, cuyas diferencias 72. quartos, y 24. quartos tienen la razon de 3. con 1.

QUESTION XXI.

Hallar tres magnitudes en progreſsion Geometria, tales, que ſumando la media con cada extrema, ſean las ſumas quadrados perfectos.

SEa la primera magnitud r. la ſegunda y. la tercera ſe halla multiplicando la y. por si miſma; y partiendo el producto por r. con que es $\frac{yy}{r}$. Sea t. lado del primer quadrado $r + y$. ſea v. lado del ſegundo $y + \frac{yy}{r}$. y ſerà la primera igualacion $r + y \backsim tt$. luego $r \backsim tt - y$. La ſegunda igualacion ſerà $y + \frac{yy}{r} \backsim vv$. luego $ry + yy \backsim vvr$. luego $vvr - ry \backsim yy$. luego $r \backsim \frac{yy}{vv - y} \backsim tt - y$. quiteſe el quebrado, multiplicando eſta vltima igualacion por el denominador, y ſerà $yy \backsim vvtt - vvy - tty + yy$. luego $vvy + tty \backsim vvtt$. luego $y \backsim \frac{vvtt}{vv + tt}$. donde ſe vè ſer las magnitudes v. t. arbitrarias.

Exemplo. Sea $v \backsim 2$. ſea $t \backsim 3$. con eſto ſe hallarà ſer $y \backsim \frac{36}{13}$. la $r \backsim \frac{81}{13}$. y la tercera magnitud $\frac{yy}{r} \backsim \frac{16}{13}$. y ſumando la ſegunda con la primera, ſerà la ſuma $\frac{117}{13}$

ſu-

sumando asimismo la segunda con la tercera, saldràn $\frac{52}{13}$. que entrambos son quadrados perfectos.

Si se quisiere satisfacer la question con enteros, se multiplicaràn los tres numeradores por 169. quadrado del denominador comun; y partiendo los productos por el mismo denominador 13. seràn las tres cantidades $r = 1053$. y $= 468$. $\frac{yy}{r} = 208$. y sumando la media con cada vna de las extremas, seràn las sumas 1521. 676. quadrados perfectos.

QUESTION XXII.

Hallar tres magnitudes, cuyos planos alternativos sean quadrados perfectos.

LA primera magnitud sea z. la segunda y. y la tercera v. y seràn los planos alternativos zy. zx. yx. Sea v. lado del primer quadrado; t. del segundo; s. del tercero. La primera igualacion serà $zy = vv$. luego $z = \frac{vv}{y}$. La segunda es $zx = tt$. luego $z = \frac{tt}{x} = \frac{vv}{y}$. y multiplicando esta vltima igualacion por los denominadores, serà $tty = vvx$. luego $y = \frac{vvx}{tt}$. La tercera igualacion es $yx = ss$. luego $y = \frac{ss}{x} = \frac{vvx}{tt}$. y multiplicando por los denominadores, serà $sstt = vvxx$. y sacando la raiz de entrambas partes, serà $st = vx$. luego $x = \frac{st}{v}$. con que las v. s. t. son arbitrarias.

Supongamos sean $v = 12$. $t = 4$. $s = 6$. y las tres magnitudes que se piden, seràn $z = 8$. $y = 18$. $x = 2$. con que los planos alternativos son $zy = 144$. $zx = 16$. $yx = 36$. todos quadrados perfectos.

QUES-

QUESTION XXIII.

Hallar tres quadrados, cuya suma sea igual à la suma de sus tres diferencias.

SEa r. el lado del quadrado menor: $r + s$. lado del mediano: $r + s + t$. lado del mayor; y seràn los tres quadrados, el primero rr. el segundo $rr + 2sr + ss$. el tercero $rr + 2sr + ss + 2tr + 2ts + tt$. y serà la suma de los tres, $3rr + 4sr + 2ss + 2tr + 2ts + tt$. el excesso del mayor al mediano es $2tr + 2ts + tt$. el excesso del mayor al mas pequeño es $2sr + ss + 2tr + 2ts + tt$. el excesso del mediano al menor es $2sr + ss$. y la suma de estos tres excessos es $4rs + 2ss + 4tr + 4ts + 2tt$. y siendo esta suma igual à la de los quadrados arriba puesta, serà, hecha la transposicion $3rr + 2tr - tt \backsim 2st$. y partiendolo todo por $2t$. serà $s \backsim \frac{3rr - 2tr - tt}{2t}$ Con que las r. t. son arbitrarias; pero t. ha de ser menor que r. como se colige del dicho quebrado.

Sea, por exemplo, $r \backsim 3$. y sea $t \backsim 1$. con que serà $s \backsim 10$. los lados de los quadrados que se piden, son $r \backsim 3$. $r + s \backsim 13$. $r + s + t \backsim 14$. los quadrados son 9. 169. 196. que sumados hazen 374. y sus diferencias 27. 187. 160. sumadas hazen tambien 374. como se pide.

Las questiones indeterminadas que hemos resuelto, son bastantes para que se vea el modo de plantèarlas, que convendrà observar con cuidado, por lo que conduce à su mas facil resolucion; y con el mismo estilo se podràn plantèar, y resolver quantas se ofrecieren; y assi no serà menester añadir mas exemplos.

CAPITULO III.

DEL MODO PARA HALLAR TODAS LAS RAIZES, ò valores de las incognitas, siendo muchas las que concurren en las igualaciones.

EN las questiones que se han resuelto hasta aora en este Libro nos hemos contentado con hallar vn solo va-

valor de cada incognita, de las que concurren en las igualaciones, que es lo bastante para que se dè por satisfecha la pregunta; pero si se quiere dàr la Analysi total, y perfecta de las questiones sobredichas, serà menester señalar todos los valores que pueden tener las incognitas, siendo las questiones determinadas, porque las indeterminadas admiten infinitos, como tengo dicho; para lo qual sirven las reglas siguientes.

REGLA I.

Para determinar quantas resoluciones puede tener qualquiera question determinada, que consta de muchas igualaciones, y diferentes incognitas.

VEase à que grado, ò à que dimensiones sube cada igualacion; multipliquense continuadamente los numeros, que expressan dichas dimensiones; y tantas resoluciones podrà tener la question, quantas vnidades huviere en el producto de dicha multiplicacion, advirtiendo, que regularmente suelen ser menos, pero jamàs exceden al sobredicho producto; y si huviere algunas menos, estas se llamaràn resoluciones deficientes.

Exemplo. Si vna question consta de tres igualaciones, la primera del grado octavo, ù de ocho dimensiones; la segunda de seis, y la tercera de dos. Multiplicarè 8. por 6. y el producto 48. por 2. que hara 96. y dirè, que à lo mas, puede tener la question 96. resoluciones. Esto se entiende, siendo determinada, porque siendo indeterminada, pueden ser sus resoluciones infinitas.

REGLA II.

Para dàr todas las resoluciones à las questiones compuestas de muchas igualaciones, y diferentes incognitas.

QUando las igualaciones que resultan del plantèo de vna question tuvieren tal disposicion, que cada vna de ellas tuviere vna incognita, que no se halla en las demàs que la preceden, segun lo que dixe en el lib. 3. cap. 2. en tal caso se obra-

obrarà en la forma siguiente: La igualacion primera, en quien, como se supone, no ay mas que vna incognita, se resolverà hallando todas las raizes, ò valores de la incognita por las reglas del lib. antecedente. Hecho esto, se substituirà cada valor hallado en lugar de dicha incognita en la segunda igualacion; y en cada substitucion se hallaràn por las mismas reglas todos los valores de la incognita: de suerte, que si por exemplo, esta fuere de tercer grado, por cada valor substituido, se hallaràn tres valores de su incognita. Los valores hallados se substituiràn en la tercera, y se obrarà de la misma manera hasta que no aya mas igualaciones que correr; y con esto quedarà la total Analysi, y resolucion que se pretende, como se vè en los exemplos siguientes.

QUESTION XXV.

Pidense tres numeros con las condiciones que expressan las tres igualaciones siguientes.

$$v^3 - 6vv + 11v - 6 = 0.$$
$$yy - 8y + v + 10 = 0.$$
$$zz - 4z + y + v = 0.$$

EN estas igualaciones se vè, que la primera solo tiene vna incognita, la segunda dos, y la tercera tres, con que se resolverà por la regla dada. Tambien porque la primera tiene tres dimensiones, la segunda dos, y la tercera dos, podrà tener la question doze resoluciones, que se hallaràn en la forma siguiente.

Resuelta la primera igualacion por las reglas del libro passado, se hallan ser sus tres raizes, ò valores de v. $v = 1$. $v = 2$. $v = 3$. substituyendo aora 1. en lugar de v. en la segunda igualacion, serà esta igualacion $yy - 8y + 11 = 0$. y se hallaran los dos valores de la y. que son proximamente 2. 6. suystituyendo en la tercera igualacion 1. en lugar de v. y dos en lugar de y. es $zz - 4z + 3 = 0$. cuyas raizes justas se hallan ser 1. 3. substituyendo otra vez 1. en lugar de v. y 6. en lugar de y. serà la tercera igualacion $zz - 4z + 7 = 6$. cuyas raizes se hallaran ser deficientes, segun las reglas del libro passado, con que del primer valor de v. que

que es 1. han salido quatro resoluciones de la question propuesta; assimismo se investigaran otras quatro con el segundo valor de v. que es 2. y otras quatro con el tercero, que es 3. con que todas seràn doze, si bien se hallan algunas resoluciones deficientes, como hemos visto.

Para proceder con buen orden, y sin perturbacion en las operaciones sobredichas, singularmente quando son mas de dos las igualaciones, convendrà mucho se dispongan estas en forma de Arbol, como se sigue.

FORMACION DEL ARBOL ANALYTICO.

1. SE supondrà, que la primera igualacion, que como dixe, solo consta de vna incognita, es el tronco de vn Arbol, donde se escrivirà: de este tronco se haran salir tantas ramas, quantas son las raizes que puede tener la sobredicha igualacion [lib. 4. Prop. 4.] al cabo de cada rama se formarà vn nudo, y en cada vno se escrivirà la segunda igualacion propuesta; de cada vno de estos nudos se sacaràn tantas ramas, quantas son las raizes que puede tener la igualacion que se escriviò en ellos: esto se continuarà con el mismo orden hasta que no aya mas igualaciones en la propuesta.

2. Se resolverà la igualacion que se escriviò en el tronco por las reglas generales del libro antecedente, hallando todas sus raizes, ò valores de la incognita: estas raizes se escriviràn en las ramas que salen del tronco, cada vna en la suya, luego se substituirà cada vna de las sobredichas raizes en la igualacion, que esta en el nudo correspondiente à su rama, y en todos los demas nudos que de el dependen: Esto mismo se harà en las otras igualaciones, siguiendo las ramas que nacen de ellas, hasta llegar à las vltimas.

3. Se tomarà el valor, ò raiz de vna de las vltimas ramas, y caminando azia el tronco en seguida, se tomaràn todos los valores que se encontraren en las ramas; y todos estos no haràn mas que vna sola resolucion de la propuesta, en que se señala vn valor de cada incognita; y como lo mis-

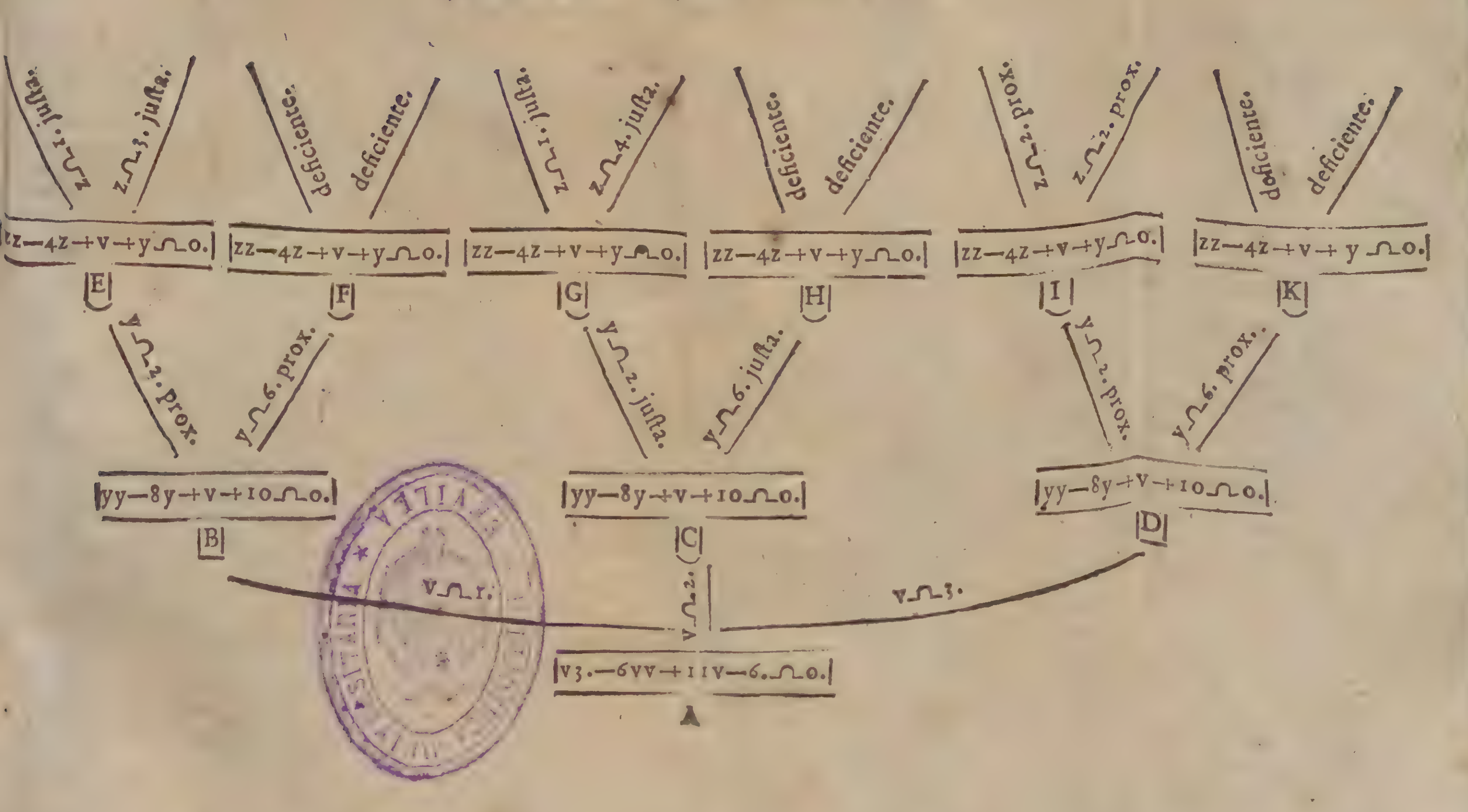
mismo se consiga tomando el valor, ò raiz escrita en cadâ vna de las vltimas ramas; y siguiendo su serie hasta el tronco, se sigue, que la question tendrà tantas resoluciones diferentes, quantas fueren las ramas que ay despues de los vltimos nudos, sino es que la question tenga algunas resoluciones deficientes.

Sirva de exemplo la misma question arriba propuesta, cuyas tres igualaciones se escriviràn en el Arbol, cuya disposicion expressa la figura. Escrivase la primera de las tres igualaciones en A. que es el tronco del Arbol; y porque esta puede tener tres raizes, se sacaràn de ella tres ramas AB, AC, AD; y al cabo de ellas se formaràn los tres nudos B. C. D. y en cada vno se escrivirà la segunda igualacion; y porque esta es de dos grados, se sacaràn de ella dos ramas, que son BE, BF: CG, CH: DI, DK, y al cabo de ellas se escrivirà la vltima igualacion en los nudos E, F, G, H, I, K, y de cada vno se haràn salir otras dos ramas, por ser tambien esta tercera igualacion del segundo grado, como se vè en la figura.

Formado yà el Arbol Analytico, se resolverà por las reglas generales la igualacion A, que se escriviò en el tronco, y se hallaràn sus tres raizes, ò valores de su incognita v ⎍ 1. v ⎍ 2. v ⎍ 3. que se escriviràn en las tres ramas que salen del tronco, cada vna en la suya, como se vè en la figura: luego se substituirà 1. en lugar de v. en las igualaciones que tienen dependencia de dicha rama: esto es, en B. en E. y en F. assimismo se substituirà 2. en lugar de v. en C. en G. y en H. tambien se substituirà 3. en lugar de v. en D. en I. y en K.

Hecha esta substitucion, se resolveràn las igualaciones B. C. D. por las reglas generales, supuesto no tienen yà mas que vna incognita y. y despues de aver escrito las raizes halladas en las ramas, que inmediatamente se siguen à dichas igualaciones, se substituiràn estos mismos valores, ò raizes en las igualaciones que de ellas dependen: esto es, la vna raiz de la igualacion B. se substituirà en E. y la otra en F. assimismo la vna raiz de la igualacion C. que es 2. en G. y la otra, que es 6. en H. como tambien la vna raiz de

ARBOL ANALYTICO.



de D. en I. y la otra en K. con esto quedaràn las igualaciones E.F.G.H.I.K. con vna sola incognita, y se resolveràn por las reglas generales, y se distribuiràn sus raizes en las vltimas ramas que se les siguen.

Concluido lo sobredicho, se tomaràn todos los valores que estàn en las ramas, empeçando de las que salen del tronco, y siguiendo sus dependientes hasta llegar à la vltima, y cada serie de estas darà vna resolucion; y por consiguiente las resoluciones seràn tantas, quantas fueren las ramas vltimas, en que terminan, como en el exemplo propuesto, passando por A. C. G. se hallan dos resoluciones, que son la vna $v \frown 2$. $y \frown 2$. $z \frown 1$. y la otra $v \frown 2$. $y \frown 2$. $z \frown 4$. Tambien procediendo por A.C.H. se hallaràn otras dos, que en este exemplo son deficientes: assimismo, passando por A.B.E se hallan otras dos, y assi en las demàs, como se vè en la figura.

REGLA III.

Para reducir à tal estado las sobredichas igualaciones, que se puedan facilmente resolver por el Arbol Analytico, ò por otras reglas.

QUando en virtud del plantèo de la question no salieren las igualaciones con la disposicion requisita para ser resuelta por el Arbol Analytico; segun lo arriba dicho se observarà lo siguiente.

Hallese [Prop. 22. ù 24. del lib. 1.] el mayor divisor comun à todas las igualaciones: Partase por este divisor cada igualacion, y guardense los quocientes; tomese cada vno de por sì, como tambien el mismo divisor comun, y hagase igual à 0. y si estas igualaciones tuvieren las condiciones para ser resueltas en el Arbol Analytico, se harà su resolucion en la forma dicha; pero si no tuvieren dicha disposicion, se resolverà cada vna de por sì por las reglas dadas al principio de este libro, y se sabràn los valores de las incognitas.

Exemplo 1. Las igualaciones formadas para resolver vna question, sean las dos siguientes.

$$x^3 + 5xx + xxy + xy + 12x - 6y + 36 \propto 0.$$
$$zzx + zzy - 6zz + 2xz + 2zy - 12z - 15x - 15y + 40 \propto 0.$$

El mayor partidor comun de entrambas, hallado por las reglas del lib. 1. es $x + y - 6$. Partiendo, pues, la primera igualacion por dicho partidor es el quociente $xx + x - 6 \propto 0$. Partiendo la ſegunda igualacion propueſta por el miſmo partidor, es el quociente $zz + 2z - 15 \propto 0$. las quales con el miſmo partidor ſon las tres igualaciones ſiguientes.

1. $xx + x - 6 \propto 0.$
2. $zz + 2z - 15 \propto 0.$
3. $x + y - 6 \propto 0.$

Reſuelta la primera por las reglas dadas en el libro antecedente, ſe halla $x \propto 2$. $x \propto -3$. Reſolviendo aſsimiſmo la ſegunda, ſe halla $z \propto 3$. $z \propto -5$. y ſubſtituyendo 2. valor poſitivo de x. en la tercera es $2 + y - 6 \propto 0$. y por Antitheſi $y \propto 4$. con que ſe han conocido los valores de las incognitas, y queda reſuelta la queſtion; y ſi ſe ſubſtituye en la miſma igualacion tercera el otro valor de x. que es -3. ſerà $y \propto 9$.

Exemplo 2. Sean las tres igualaciones ſiguientes, planta de vna queſtion que ſe propuſo.

$$xx + xy - xz - 4x + 2zy - zz - 2z - yy - 2y + z + 3 \propto 0.$$
$$x^3 + xxz - xxy - xx - xz - zz + zy - x + y + 1 \propto 0.$$
$$x^3 y - xxyy + xxyz - xxy - zz - xz + zy - 13x - 12z + 13y + 13 \propto 0.$$

Buſqueſe el mayor partidor comun, y ſe hallarà ſer $x + z - y - 1 \propto 0$. y partiendo cada igualacion por eſte partidor, ſe hallaràn los tres quocientes ſiguientes, a quienes ſe añade el diviſor comun, que todos forman quatro igualaciones.

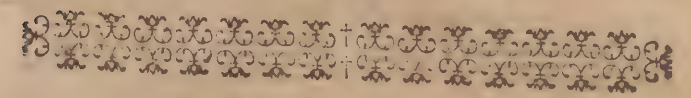
1. $x + y - z - 3 \propto 0.$
2. $xx - z - 1 \propto 0.$
3. $xxy - z - 13 \propto 0.$
4. $x + z - y - 1 \propto 0.$

Deſ-

Deſpejando la x. en la primera igualacion, ſe halla ſer ſu valor $x \propto z - y + 3$. que ſubſtituido en lugar de x. en la ſegunda igualacion, produce la igualacion A. ſiguiente; y ſubſtituido en la tercera, reſulta la igualacion B. y hecha la ſubſtitucion en la quarta, reſulta la igualacion C.

$$\text{A.} \quad zz + yy - 2zy + 5z - 6y + 8 \propto 0.$$
$$\text{B.} \quad y3 + zzy - 2zyy + 6zy - 6yy + 9y - z - 13 \propto 0.$$
$$\text{C.} \quad z - y + 1 \propto 0.$$

De la igualacion C. ſe ſaca el valor de z. que es $z \propto y - 1$. que ſubſtituido en la igualacion A. da $2y \propto 8$. luego $y \propto 4$. con que $z \propto 4 - 1$. eſto es, $z \propto 3$. Y ſiendo $x \propto z + 3 - y$. ſerà $x \propto 2$. y queda reſuelta la propueſta; porque los tres valores ſon 2. 4. 3. con eſte miſmo eſtilo ſe reſolveràn otras qualeſquiera queſtiones ſemejantes.



LIBRO VII.

DE LAS MAGNITUDES irracionales, è inconmenſurables.

DEFINICIONES.

1. *MAGNITUDES irracionales, ò inconmenſurables ſon aquellas que no tienen entre ſi razon alguna, que ſe pueda expreſſar con numeros, ò que ſea como vn numero à otro.* Como la Diagonal, y el lado del quadrado, cuya razon no ſe puede explicar con numeros, ni es como numero alguno a otro

numero, como demuestra Euclides, lib. 10. Prop. 117. y al contrario son las *magnitudes conmensurables*, quando la razon que tienen entre sì se puede explicar con numeros, como el paralelogramo, y triangulo de igual basa, y altura, que son como 2. con 1. (41.1.Eucl.)

2. *Raizes irracionales, sordas, ò inconmensurables se llaman las que no son conmensurables con sus potestades; y por consiguiente no se pueden explicar con numero alguno, ni entero, ni quebrado.* Y aunque nuestro entendimiento no pueda jamàs comprehender la essencia de estas raizes; pero su existencia se demonstrarà claramente en la Prop. 7.

1. Para formar su expression nos valdrèmos del signo radical $\surd$. puesto antes del numero, cuya fuere la raiz; $\surd$. 5. significarà *raiz de* 5. y en diziendo absolutamente, *raiz*, se entenderà la quadrada; y assi $\surd$. 5. es *raiz quadrada de* 5. pero quando se quisiere expressar la raiz de otras potestades, se añadirà al signo radical el exponente proprio de aquella potestad; y assi, para dezir *raiz cubica de* 12. escrivirèmos $\surd$3. 12. para dezir, *raiz quadrado-quadrada de* 20. escrivirèmos $\surd$4. 20. y assi en las demas.

3. *Si dos magnitudes son entre sì inconmensurables; pero sus potencias, como quadrados, cubos, &c. son conmensurables, las magnitudes sobredichas, se llamaràn inconmensurables en longitud; pero conmensurables en quanto à la potencia.* Como en xx ⏜ 12. y zz ⏜ 24. la raiz de 12. ù de xx. que es x. es inconmensurable con la raiz de 24. ù de zz. que es z. [117. 10. Euclid.] pero sus potestades son conmensurables, por ser proporcionales xx. zz :: 12. 24. Estas, pues, se llaman *inconmensurables en longitud, y conmensurables en quanto à la potencia*; à diferencia de otras, que siendo irracionales, son *conmensurables en longitud, y potencia*, como $\surd$. 3. $\surd$. 12. cuyas potencias, ò quadrados 3. 12. son conmensurables, como es claro, y sus lados, ò raizes tambien lo son; pues siendo los dichos quadrados como 3. con 12. esto es, como 1. con 4. seran sus lados, ò raizes como 1. con 2. (20. 6. Eucl.) son, pues, proporcionales $\surd$. 3. $\surd$. 12 :: 1. 2. luego son conmensurables.

4. Las magnitudes irracionales pueden ser en dos maneras,

neras, *simples*, ò *compuestas*. Simples son, las que no se componen de diferentes cantidades atadas con los signos +, ò —, como V3. 20. raiz cubica de 20. *Compuestas son, las que constan de diferentes magnitudes con los signos sobredichos*; como V2. 12 + 5. ò V3. 20 — 3. &c. en quanto à la expression de estas magnitudes compuestas; se ha de advertir, que quando se quiere notar, que la raiz ha de ser de toda la composicion, se ha de cerrar esta dentro de vna parenthesi; y assi, V. [12 + 5.] es lo mismo que V. 17. pero V. 12 + 5. significarà, que à la raiz de 12. se han de añadir 5. que es cosa muy diferente.

5. Aunque en esta expression V. 15. el numero 15. es el quadrado de dicha raiz, como tambien en esta V3. 12. el numero 12. es el cubo de dicha raiz; pero hablando absolutamente, por *numero quadrado* se entiende el que tiene por raiz algun numero, como por *numero cubico* se debe entender aquel, cuya raiz cubica es numero; y assi 64. es numero quadrado, por tener por raiz al 8. y assimismo 27. es numero cubico, por ser su raiz el 3. y lo mismo en las demàs potestades.

CAPITULO I.

DE LOS NUMEROS QUE SON QUADRADOS, cubicos, &c.

PROP. I. Theorema.

El producto de dos numeros quadrados, es vn numero quadrado; cuya raiz es el producto de las raizes de los mismos numeros.

ESte Theorema queda demonstrado en el Tratado de la Arithmetica Superior, lib. 2. Prop. 9. y assi bastarà dar aora su explicacion. Los numeros 4. y 16. son dos numeros quadrados, cuyas raizes son 2. y 4. Digo, que 64. producto de 4. por 16. es necessariamente vn nu-

numero quadrado, cuya raiz es 8. producto de 2, por 4. Veafe la demonftracion en el lugar citado.

COROLARIO.

DE aqui fe colige, que el producto de vn numero quadrado por sì mifmo, ha de fer numero quadrado; cuya raiz es el producto de la raiz del dicho primer quadrado, multiplicada por sì mifma.

PROP. II. Theorema.

En qualefquiera quatro numeros proporcionales, el producto de los antecedentes tiene con el producto de los confequentes la mifma razon que vn numero quadrado, à otro numero quadrado.

EXplicacion. Sean los quatro proporcionales 12. 24 :: 8. 16. Digo, que 96. producto de los antecedentes, tiene con 384. producto de los confequentes, la mifma razon que vn numero quadrado, à otro numero quadrado.

Demonftr. Por fer iguales las razones de 12. a 24. y de 8. à 16. fi fe reducen a los minimos terminos, feran los quatro proporcionales 1. 2 :: 1. 2. y fiendo en eftos los antecedentes vn mifmo numero, como tambien los confequentes, no ay duda feran el producto 1. de los antecedentes, y 4. producto de los confequentes, numeros quadrados. Teniendo, pues, 96. con 384. la mifma razon que 1. con 4. por componerfe entrambas razones de las de los lados, ò raizes de los productos, que fon razones iguales: tendra 96. con 384. la razon mifma que vn numero quadrado, a otro numero quadrado.

PROP. III. Theorema.

El producto de dos numeros planos femejantes, es numero quadrado.

AQuellos numeros fe llaman *planos femejantes*, cuyas raizes fon proporcionales: efto es, fon aquellos que proceden de la multiplicacion de numeros proporcionales, como dixe en la Arithmetica Superior, lib. 1. def. 13. como

mo por exemplo 8. y 18. ſon numeros planos ſemejantes, porque las raizes de cuya multiplicacion procede el 8. ſon 2. 4. y las de 18. ſon 3. 6. y ſon proporcionales 2. 4 :: 3. 6. Digo, pues, que 144. producto de 18. por 8. es numero quadrado.

Demonſtr. Por ſer proporcionales las quatro raizes 2. 3 :: 4. 6. ſon (2.) los planos 8. 18. producidos de dichas raizes, como dos numeros quadrados: eſto es, como 4. à 9. que ſon los quadrados de los minimos terminos 2. y 3. à que ſe pueden reducir las dos razones iguales ſobredichas; ſon, pues, proporcionales 8. 18 :: 4. 9. y alternando 8. 4 :: 18. 9.

Por la miſma razon el producto 144. de los antecedentes 8. 18. tiene con 36. producto de los conſequentes 4. 9. la razon de vn numero quadrado à otro quadrado: eſto es, como 4. à 1. que ſon los quadrados de los minimos terminos à que ſe pueden reducir las razones de 8. a 4. y de 18. à 9. ſon, pues, proporcionales eſtos quatro quadrados.

144. 36 :: 4. 1.

Siendo, pues, proporcionales dichos quadrados, tambien lo ſeran ſus raizes, que [20. 6. Euclid.] tienen razon ſubduplicada de los quadrados; luego ſon $\sqrt{}$. 144. $\sqrt{}$. 36. :: $\sqrt{}$. 4. $\sqrt{}$. 1. luego la razon de la raiz de 144. à la raiz de 36. es conocida, ſupueſto que es como 2. raiz de 4. à 1. raiz de 1. pero la raiz de 36. es conocida, por ſer raiz de vn numero, que por proceder de la multiplicacion de dos quadrados 4. 9. es (1.) numero quadrado: luego la raiz de 144. tiene vna razon conocida à vn numero conocido: luego ella es numero conocido; y por conſiguiente el 144. producto de 8. y 18. es numero quadrado. [defin. 5.]

PROP. IV. Theorema.

El producto de dos numeros cubicos es numero cubico, cuya raiz cubica es el producto de las raizes de dichos numeros.

SEan los numeros cubicos 8. 27. cuyas raizes cubicas ſon 2. 3. Digo, que 216. producto de dichos cubos, es vn numero cubico, cuya raiz es el producto 6. de las

raizes 2. y 3. Queda demonstrado en la Prop.10.lib.2. de la Arith.Super.

COROLARIO.

VN numero cubico, multiplicandose à sì mismo produce vn numero cubico, por ser este vn producto de dos numeros cubicos.

PROP. V. Theorema.

En tres razones iguales de numero à numero, el producto de los tres antecedentes, al producto de los tres consequentes, es como vn numero cubico à otro numero cubico.

SEan las tres razones iguales b. c :: f. g :: h. l. el producto de los antecedentes es b f h, y el producto de los consequentes es c g l. Digo, que b f h. tiene con c g l. la razon que vn numero cubico, à otro numero cubico.

Demonstr. La razon de b. à c. reducida à los minimos terminos, sea por exemplo la de 2. à 3. y como todas las tres sean iguales, seran las tres en minimos terminos 2. 3::2. 3:: 2.3. donde por ser los antecedentes vn mismo numero, como tambien los consequentes, serà 8. producto de los antecedentes vn numero cubico, y 27. producto de los consequentes, serà otro numero cubico, como consta de la definicion de estos numeros. Siendo, pues, la razon de b f g. à c g l. la misma que de 8. à 27. por ser entrambas compuestas de vnas mismas razones, serà b f h, à c g l. como vn numero cubico à otro numero cubico.

ESCHOLIO.

LO que hemos demonstrado de las potestades quadrada, y cubica, se demonstrarà con igual facilidad de todas las demàs potestades, como por exemplo; que si vn numero quadrado-quadrado se multiplica por otro quadrado-quadrado, el producto serà vn numero quadrado-quadrado: Que si quatro razones entre numero, y numero fueren iguales, el producto de los antecedentes tendrà con el producto de los consequentes la razon que vn numero quadrado-quadrado, à otro quadrado-quadrado; y assi en las demàs potestades numericas hasta el infinito.

CA-

CAPITULO II.

DE LA LOGISTICA DE LOS IRRAcionales simples.

AUnque no se tenga, ni se pueda tener el conocimiento del valor de las raizes irracionales; pero esto no obstante se pueden exercitar en ellas todas las operaciones de la Arithmetica, sumandolas, restandolas, y multiplicando, y partiendo vnas por otras, cuya noticia no se debe despreciar; pues siendo muchos mas sin comparacion los numeros que no son quadrados, ni cubicos, &c. que los otros, es forçoso incurrir frequentemente en magnitudes, ò raizes sordas, è irracionales, en cuyo manejo, sino estuviere diestro el Analysta, se hallarà atajado en las resoluciones.

PROP. VI. Theorema.

Si vn numero quadrado mide à otro numero quadrado, tambien la raiz de aquel medirà à la raiz de este; y assi en las demàs potestades.

ESta Proposicion es la 14. del lib. 8. de Eucl. Sean los quadrados 4. y 36. Digo, que porque 4. es medida de 36. tambien 2. que es raiz del 4. serà medida justa de 6. que es raiz del 36. multipliquese 2. por 6. y sera el producto 12.

4.	12.	36.
2.		6.

Demonstr. (2. lib. 2.) Los tres numeros, ò planos 4. 12. 36. son continuos proporcionales, y tienen la misma razon que 2. con 6. luego (7. 8. Eucl.) si el 4. como se supone, mide al 36. tambien medirà al 12. y como 4. à 12. sea como 2. à 6. si el quatro mide al 12. tambien el 2. medirà al 6. luego si 4. mide al 36. tambien el 2. al 6. lo mismo se convence en las demas potestades.

PROP.

PROP. VII. Theorema.

Ay poteſtades numericas, cuyas raizes, ni ſe pueden explicar con numeros enteros, ni con quebrados.

EL numero 6. ſe halla entre dos numeros quadrados inmediatos, que ſon 4. y 9. Digo, que el 6. carece totalmente de raiz que ſe pueda explicar con numeros, ni enteros, ni quebrados.

Demonſtr. Primeramente no ſe puede explicar con numero entero, porque ſiendo el 6. mayor que 4. y menor que 9. tambien ſu raiz ha de ſer mayor que 2. raiz de 4. y menor que 3. raiz de 9. y como no aya numero entero mayor que 2. y menor que 3. es claro no poder tener el 6. numero entero por raiz.

4.	6.	9.
M $\frac{7}{3}$ N		O. $\frac{49}{9}$ P.

2. Tampoco puede ſer numero quebrado; y ſi alguno quiſiere defender lo contrario, ſea, por exemplo el quebrado MN. raiz de 6. multipliqueſe MN. por sì miſmo, y ſera el producto OP. ſu quadrado; y como ſe ſuponga ſer 6. el quadrado de MN. ſeràn el quebrado OP. y 6. iguales; con que reducido el quebrado OP. a enteros, avrà de ſalir el 6. lo que es impoſsible, porque para eſto era meneſter que 9. fueſſe juſta medida de 49. y ſiendo 49. el quadrado de 7. y el 9. quadrado de 3. ſera (6.) el 3. juſta medida de 7. y como ſiendo el denominador de vn quebrado juſta medida de ſu numerador, el tal quebrado es igual a vn numero entero, ſe ſiguiria, que el quebrado MN. ſeria numero entero; y ſiendo raiz de 6. como ſe ſupone, tendrà el numero 6. por raiz vn numero entero, lo que ſe demonſtrò ſer impoſsible; luego el numero 6. no tiene por raiz, ni numero entero, ni quebrado; lo miſmo ſe demonſtrarà de las demàs poteſtades.

COROLARIO.

EL numero entero, que carece de raiz juſta que ſea numero entero, tampoco puede tener por raiz juſta ningun quebrado: coligeſe de la demonſtracion ſobredicha.

PROP.

PROP. VIII. Problema.

Reducir los irracionales à vna misma denominacion.

ESTOS irracionales V2. 20. V3. 22. son de diferente denominacion por ser diferentes los exponentes de las raizes; y el reducirlas à vn mismo exponente, sin que por esso se altere su valor, es el assunto de esta Proposicion.

REGLA I.

MUltipliquense los exponentes de las raizes entre sì, y el producto serà el exponente comun de la raiz: hecho esto, subanse entrambas potestades à la potestad, cuyo exponente es el mismo que se le diò à la raiz por comun, lo qual se haze sin atender à dicho exponente, multiplicando cada numero continuamente por si mismo hasta la potestad que indica el exponente contrario, y quedarà hecha la reduccion.

Exemplo. Pidese se reduzgan à vn denominador comun V2. 6. y V3. 5. escrivase la vna cantidad sobre la otra con vna Cruz, en la forma siguiente.

V6.	V2.	X	6.	36.	216.
	V3.		5.	25.	

Y multiplicando V2. por V3. sale V6. denominador comun, que se escrive à la mano izquierda: multipliquese el 6. por si mismo hasta tres terminos, por ser el exponente de la raiz contraria 3. y sale el vltimo producto 216. multipliquese 5. hasta dos terminos, por ser el exponente contrario 2. y sale 25. Y digo, que V6. 216. y V6. 25. es lo mismo que V2. 6. y V3. 5. y estàn reducidas à vn comun denominador V6.

2. *De la misma suerte se harà la reduccion de vna magnitud irracional, y vn numero absoluto, à vn comun denominador.*

Exemplo. Se han de reducir à vn comun denominador 5. y V3. 6. multipliquese el 5. hasta tres terminos, por ser el exponente opuesto 3. y sale 125. con que

	X	5.	25.	125.
V3.		6.		

serà

ſerà √ 3. 125. y √ 3. 6. lo miſmo que 5. y √ 3. 6. como es patente.

3. *Quando las cantidades que ſe han de reducir ſon literales, ſe multiplicaràn los exponentes de las letras por los exponentes de la raiz contraria; en los demàs ſe obrarà como antes.*

Exemplo. Se han de reducir à vna miſma denominacion √ 3. b2. y √ 2. a1. multiplicando √ 3. por raiz √ 2. ſale √ 6. denominador comun; multiplicando el exponente de b2. por el opueſto de √2. ſale b4. y el de a1. por el de √3. produce a3. y quedan reducidas las raizes a vna denominacion comun.

√6. √ 3. X b2. b4.
√ 2. a1. a3.

4. *Si las letras tuvieren numero precedente, ſe obſervarà con los numeros la regla 1. y con las letras la tercera.*

Exemplo. Pideſe la reduccion à vn comun denominador de √2. 3a2. y √4. 5a3. eſcritos en la forma acoſtumbrada como ſe vè.

√8. √ 2. X 3a2. 9. 27. 81a8.
√ 4. 5a3. 25.a6.

Se multiplicarà √ 2. por √ 4. y ſale el comun denominador √ 8. y multiplicando el 3. que precede al a2. haſta quatro terminos por ſer el exponente de la raiz opueſta 4. ſale 81. y multiplicando a2. por √ 4. ſale a8. Tambien multiplicando 5. haſta dos terminos, ſale 25. y multiplicando el exponente de a3. por el de √2. ſale a6. y ſeràn √ 8. de 81a8. √ 8. 25a6. lo miſmo que √ 2. 3a2. y √ 4. 5a3.

Demonſtracion de la Regla. En el exemplo 1. el numero 6. es el quadrado de √ 2. 6. luego 36. producto de 6. por sì miſmo, es la quarta poteſtad, y el 216. la ſexta de dicha raiz. Aſsimiſmo 5. es el cubo, ò tercera poteſtad de √ 3. 5. luego 25. producto de 5. por si miſmo es la ſexta poteſtad de la miſma raiz, como conſta de las definiciones de las poteſtades en el lib. 1. de la Arithmetica Super. luego entrambas raizes tienen vna miſma denominacion; y co-

mo

mo aunque ſuban las poteſtades, el numero, ò magnitud, que es raiz ſiempre ſea la miſma; ſe ſigue, que el miſmo numero ſe ſignifica por V2. 6. que por V6. 216. y el miſmo ſe denota por V3. 5. que por V6.25.

PROP. IX. Problema.

Multiplicar irracionales ſimples.

REGLA I.

QUando las raizes ſon de vna miſma denominacion, las magnitudes, cuyas fueren las raizes, multipliquenſe vnas por otras, y la raiz del producto ſerà el producto de las raizes.

Exemplo 1. Se ha de multiplicar V. 5. por V. 10. multiplico, pues, 10. por 5. y al producto añadole el ſigno radical V. 50. y eſte es el producto de las raizes propueſtas: aſsimiſmo, multiplicando V3. 7. por V3. 15. ſerà el producto V3. 105. Fundaſe eſta regla en que (Prop. 1. y 4.) el producto de las poteſtades tiene por raiz el producto de las raizes de dichas poteſtades: luego para multiplicar las raizes baſta añadir el ſigno radical al producto de las poteſtades.

Exemplo 2. Se ha de multiplicar V.x3.por V.b3. obrando ſegun la regla es el producto V.x3. b3. aſsimiſmo multiplicando V3.a2. por V3.z4. es el producto V3.a2.z4.

De la miſma manera ſe multiplican las raizes ſordas, aunque ſus poteſtades lleven letras, y numeros, como ſe ve en los ſiguientes exemplos.

Multiplicando V. 3b1. por V. 6b2. es el producto V. 18b3.

Multiplicando V3. 10a2. por V3. 9x2. es el producto V3. 90. a2. x2.

Si ſe multiplica V3. 4z4. por V3. 6b3. es el producto V3. 24z4. b3.

REGLA II.

SI las raizes que ſe han de multiplicar fueren de diferente denominacion, ſe reduciràn à vn miſmo denominador, (5.) y hecho eſto ſe obrarà como antes, como en los exemplos que ſe ſiguen.

Se

Se ha de multiplicar √. 5. por √ 3. 10. Lo primero se reduciràn à vna misma denominacion, y seràn √6. 125. y √ 6. 100. multiplicando despues 125. por 100. y añadiendo el signo radical, es el producto que se pide √ 6. 12500. Si se ha de multiplicar √4.10. por 5. se subirà el 5. à la quarta potestad, y añadiendole el signo radical, serà √4. 625. que multiplicado por √4.10. es el producto √4. 6250.

COROLARIOS.

De aqui se colige lo primero, vna cosa verdaderamente admirable; y es, que siendo impossible el conocimiento de dos numeros, se puede con evidencia, dar, y conocer su producto; porque siendo assi, que es impossible conocer que numero sea √.2. ni √.18. se sabe que el producto de el vno por el otro es 6. esto es √. 36.

2. De lo dicho tambien se infiere, que para multiplicar vna raiz quadrada por sì misma, ò dàr su quadrado, basta borrar el caracter radical, y dexar el numero, ò letra, que es su potestad: como para multiplicar √.6. por √.6. basta borrar el signo, y dexar solo al 6. que es el producto, ò quadrado de la raiz de 6. assimismo en las raizes sordas de las demàs potestades, se daràn sus potestades; como para cubicar √3. 10. basta escrivir 10. y assi en las demàs.

PROP. X. Problema.

Partir irracionales simples.

REGLA GENERAL.

Partanse las magnitudes, cuyas son las raizes, la vna por la otra, y la raiz quociente serà el quociente de la particion.

Esta regla es inversa de la multiplicacion; porque si multiplicando √.2. por √.50. es el producto √.100. luego para partir √. 100. por √. 50. basta partir 100. por 50. y la raiz del quociente; esto es, √. 2. serà la raiz que se pide: veanse los exemplos siguientes.

Partiendo √.18.b2.por √.6.b2. es el quociente √.3b.

Partiendo √. 3. 90a2. x2. por √. 3. 9x2. es el quociente √.3.10a2.

Partiendo √. 5. 2423. b2. por √. 5. 6b2. es el quociente √.5.423.

Si las raizes fueren de diferente denominacion, se reducirán à vn comun denominador, y se obrarà de la misma suerte: assimismo, si la raiz se huviere de partir por numero absoluto, ò al contrario, se subirà el numero à la misma potestad de la raiz, y se harà la particion.

PROP. XI. Problema.

Hallar si dos raizes irracionales son entre sì conmensurables.

AUnque todas las raizes sordas, ò irracionales son inconmensurables con sus potestades; pero dos raizes irracionales, comparadas entre sì, pueden ser, ò conmensurables, ò inconmensurables: *Conmensurables* son, las que tienen entre si razon de vn numero à otro numero; las quales tambien se llaman *Comunicantes*, por comunicarse con los numeros racionales, en quanto à tener vna misma razon comun, y componer con ellos vna misma proporcion: tales son V.12. y V.3. que como expliquè en la def. 3. tienen entre si la razon de 2. a 1. *Inconmensurables* son, las que no tienen entre si razon de vn numero à otro. Dadas, pues, dos raizes sordas, se conocerà si son conmensurables entre si por qualquiera de los modos siguientes.

MODO I.

1. *SI las raizes dadas tuvieren vnos mismos exponentes, se partirà la mayor por la menor; (7.) y si el quociente tuviere raiz racional del mismo exponente, seràn las raizes conmensurables; y si no, inconmensurables: y siendo conmensurables tendràn entre si la razon que tuviere la raiz del quociente con la vnidad.*

Exemplo 1. Quiero averiguar si son conmensurables V. 12. con V.3. Parto, pues, 12. por 3. y es el quociente 4. numero quadrado, cuya raiz es 2. y digo ser conmensurables, y su proporcion ser la siguiente: V. 12. V. 3. :: 2. 1.

Demonstr. Si se parten las magnitudes dadas 12. 3. por 3. los quocientes seràn 4. 1. luego son proporcionales 12. 3. :: 4. 1. luego sus raizes tambien seràn proporcionales V.12. V.3. :: 2. 1.

Exemplo 2. Se han de averiguar V3. 80. V3. 10. Partien-

tiendo la primera por la segunda, es el quociente 8. que tiene por la raiz justa 2. Son, pues, proporcionales V3. 80. V.10::2.1.

Exemplo 3. Sean V 3. 320. y V 3. 135. Partiendo vna por otra, es el quociente V3. $\frac{320}{135}$. reducido el quebrado à los minimos terminos, es $\frac{64}{27}$. que es racional, cuya raiz cubica es $\frac{4}{3}$. son, pues, conmensurables, y tienen entre sì la razon de 4. à 3. ù de $\frac{4}{3}$. con la vnidad.

2. Si los exponentes fueren diferentes, se reduciràn las raizes à vna misma denominacion; y hecho esto, se obrarà como antes.

Exemplo 1. Sean V3.25. y V2.5. Hecha la reduccion à vn comun denominador, son V6.625. V6.125. Partiendo el mayor por el menor, sale el quociente 5. que no es numero cubico; y assi concluyo, diziendo, ser dichas raizes inconmensurables.

MODO II.

Hallese la mayor medida comun de los dos numeros (lib. 2. Prop. 7. Arithm. Infer.) Partanse por ella los mismos numeros, y si los quocientes tuvieren raiz racional, seràn las raizes dadas conmensurables; y tendràn entre sì la razon misma que las raizes de los quocientes; pero si no la tuvieren, seràn inconmensurables.

Exemplo 1. Sean V. 12. y V. 3. La mayor medida comun de 12. y 3. es 3. partiendo 12. por 3. y tambien 3. por 3. son los quocientes 4. y 1. La raiz de 4. es 2. y la de 1. es 1. Digo, pues, que las raizes propuestas son conmensurables, y su proporcion es como 2. à 1.

Exemplo 2. Sea V3. 320. y V3. 135. La mayor medida comun es 5. partiendo 320. y 135. por 5. salen 64. y 27. cuyas raizes cubicas son 4. 3. Digo, pues, ser conmensurables las raizes propuestas, cuya razon es la misma que de 4. à 3.

Si las raizes fueren de diferente denominacion, se reduciràn à vna

vna misma, y se obrarà como antes. Esta regla se funda en lo mismo que la primera.

MODO III.

REduzganse las raizes à vna misma denominacion, si la tuvieren diferente. Hecho esto, si fueren V2. se multiplicarà el numero mayor por el menor; si fueren V3. se multiplicarà por el quadrado del menor; y si V4. por su cubo, &c. y si el producto tiene raiz racional, seràn las raizes dadas conmensurables; y la mayor tendrà con la menor la misma razon, que la raiz de dicho producto con el numero menor.

Exemplo 1. Sean V. 12. y V. 3. porque es raiz quadrada, multiplico 12. por 3. y es el producto 36. cuya raiz es 6. y digo ser conmensurables, y ser su proporcion como 6. con 3.

Exemplo 2. Sean V3. 200. y V3. 25. por ser V3. multiplico 200. por 625. que es el quadrado de 25. y sale el producto 125000. cuya V3. es 50. Digo, pues, son conmensurables, y su razon es la de 50. à 25. esto es, como 2. à 1.

Si las cantidades compuestas fueren literales, se obrarà de la misma manera, segun el modo 1. y 3. observando las reglas de la multiplicacion, y particion de estas cantidades.

Exemplo. Sean V3. b2. y V3. b5. obrando por el modo 1. partase V3. b5. por V3. b2. y sale el quociente V3. b3. cuya raiz cubica es b. luego son dichas raizes conmensurables. Por el modo 2. multiplico b5. por b4. que es quadrado de b2. y es el producto b9. cuya raiz cubica es b3. luego son conmensurables; y su proporcion es como b3. con b2. ò como b2. con b. ò como b. con 1.

Quando por qualquiera de estos modos no sale la raiz racional, seràn inconmensurables: Como si las raizes son V3. 6. V3. 4. el quadrado de 4. es 16. multiplicado por 6. produce 96. pues porque 96. no tiene raiz racional, digo ser inconmensurables las raizes propuestas, y assi en las demàs.

PROP. XII. Problema.

Sumar irracionales ſimples.

EXplicarè diferentes modos, para que el Algebrico haga eleccion del que mejor le pareciere.

MODO I.

1. *SI las raizes ſon iguales, y de vna miſma denominacion: eſto es, que el ſigno radical V. lleva vn miſmo exponente, ſe ſubirà el numero coeficiente de las raizes à la poteſtad de igual grado, ſegun fuere el exponente; eſta poteſtad ſe multiplicarà, por aquella, cuya ſuere la raiz; y la raiz del producto ſerà la ſuma que ſe deſea.*

Exemplo 1. Pideſe la ſuma de 4. V. 6. El quadrado de 4. numero de las raizes es 16. Multiplico 16. por 6. quadrado de las raizes, y el producto V. 96. es la ſuma que ſe pide.

Exemplo 2. Pideſe la ſuma de 3. V3. 10. El cubo de 3. es 27. multiplicado por 10. cubo de las raizes, dà el producto V3. 270. que es la ſuma que ſe pretende.

Si las raizes (ſean iguales, ò deſiguales) fueren de diferente denominacion: 1. Se reduciràn à vn comun denominador (5.) 2. Se examinarà (8.) ſi ſon conmenſurables: 3. Aviendo hallado ſer conmenſurables, ſe ſumaràn los terminos de ſu razon; y ſe harà vna regla de tres, como el primero de los terminos, à la ſuma de entrambos; aſsi la primera de las raizes, à la ſuma de entrambas; y ſe tendrà la ſuma, como ſe vè en el exemplo ſiguiente.

Exemplo 1. Pideſe la ſuma de V. 12. y V. 3. que por la Prop. antecedente ſe hallan ſer conmenſurables, y que tienen la razon de 2. à 1. Pues porque la primera à la ſegunda es, como 2. à 1. ſerà componiendo la primera à la ſuma de entrambas, como 2. à 3. Hagaſe, pues, vna regla de tres, como 2. con 3. aſsi V. 12. al termino quarto: Multiplico, pues, V. 12. por 3. eſto es, el quadrado 12. por el quadrado 9. y ſale V. 108. que partido por 2. eſto es, el quadrado 108. por el quadrado 4. ſale V. 27. y eſta es la ſuma de entrambas raizes, como baſtantemente ſe vè demonſtrado.

Es conveniente exercitar estas reglas en las raizes racionales, para formar mas perfecta idea de las operaciones, lo que observarè en algunos exemplos, como en el siguiente.

Exemplo 2. Se han de sumar V3. 27. y V3. 8. Hallase ser conmensurables, y ser como 3. con 2. Sumando, pues, 3. con 2. son 5. y hago vna regla de tres, como 3. con 5. assi V3. 27. con el quarto termino, que se hallarà ser V3. 125. que es 5. suma de 3. raiz cubica de 27. y de 2. raiz cubica de 8. y assi en las demas. Si las raizes se hallaren inconmensurables, se sumaràn con el signo +, como para sumar V. 45. con V. 30. se escrivirà V. 45. + V. 30.

MODO II.

AVeriguese si las raizes dadas son conmensurables; y siendolo, sumense los terminos que expressan su razon: multipliquese la suma sobredicha, tomandola como raiz de su potestad, por el mayor partidor comun de las raizes dadas, y el producto con el signo radical serà la suma que se pide, como en el exemplo siguiente.

Exemplo 1. Pidese la suma de V. 147. y V. 12. Su mayor partidor, ò medida comun es V. 3. partiendo entrambos numeros por 3. son los quocientes 4. y 49. cuyas raizes son 2. 7. con que se ha hallado ser conmensurables, y tener entre si la razon de 7. con 2. La suma de estos dos terminos es 9. esto es, V. 81. multipliquese V. 81. por V. 3. medida comun, y el producto V. 243. es la suma que se pide. El fundamento viene a ser casi el mismo del Modo antecedente.

Exemplo 2. Sean tres raizes V. 8. V. 50. V. 72. cuya suma se pide. El comun divisor es 2. partidas, pues, por 2. son los quocientes V. 4. V. 25. V. 36. cuyas raizes son 2. 5. 6. que sumadas hazen 13. cuyo quadrado es 169. Multipliquese V. 169. por V. 2. y el producto V. 338. serà la suma que se pide.

MODO III.

Especial para las raizes quadradas.

COn la siguiente regla se sumaràn las raizes quadradas, aunque sean entre si inconmensurables. Hagase vna suma de

las magnitudes, cuyas fueren las raizes propuestas, y del duplo del plano, ò producto de las mismas dos raizes; y la raiz quadrada de esta suma serà la suma de las raizes.

Exemplo. Pidese la suma de V. 12. V. 3. sumense sus dos quadrados, y haràn 15. multipliquense las raizes propuestas vna por otra, y serà su plano, ò producto V. 36. dupliquese este producto; esto es, multipliquese por 2. que es multiplicarse por V. 4. y es el duplo V. 144. que con 15. suma de los quadrados, haze V. 144.+15. esto es, 27. suma que se pide.

Demonstr. Toda esta regla no es mas que vna practica de la Prop. 4. del lib. 2. de Euclides, donde se demuestra, que la suma de dos quadrados, y de dos planos de los lados de ellos mismos, es vn quadrado, cuyo lado es la suma de los lados de los sobredichos quadrados.

PROP. XIII. Problema.

Restar irracionales simples.

MODO I.

1. *SI las raizes fueren iguales, y de vna misma denominacion; se harà la resta como en los numeros ordinarios, y las que componen el residuo se reduciràn à vna sola.*

Exemplo. De 4. V. 6. se han de restar 2. V. 6. hecha la resta del modo ordinario, serà el residuo 2. V. 6. que reducidas à vna sola [por el modo 1. Prop. 9.] serà V. 24. Digo, pues, que si de 4. V. 6. se restan 2. V. 6. el residuo es V. 24.

2. *Si las raizes (sean iguales, ò desiguales) fueren de diferente denominacion, se reduciràn à vn comun denominador; y se averiguarà si son conmensurables; y caso que lo sean, se partirà la mayor por la menor, y se hallarà la razon que tienen entre si; hecho esto, se restarà el termino menor de esta razon, de el mayor, y se formarà vna regla de tres, diziendo, como el termino menor, al residuo; assi la raiz menor al quarto, que serà la resta que se pide.*

Exemplo 1. Se ha de restar V. 3. de V. 27. Partiendo, pues, 27. por 3. es el quociente 9. cuya raiz es 3. con que son dichas raizes conmensurables, y su razon es la de 3. a 1.

à 1. restando 1. de 3. es el residuo 2. Hago, pues, vna regla de tres, como 1. con 2. assi V. 3. con el termino quarto: multiplico V. 3. por 2. esto es, por V. 4. y es el quociente V. 12. que partida por 1. se queda como se estaba; es, pues, el residuo que se pide. V. 12.

Exemplo 2. Se ha de restar V. 8. de V. 50. Partiendo la mayor por la menor, es el quociente $\frac{25}{4}$. cuya raiz quadrada son $\frac{5}{2}$. son, pues, las raizes como $\frac{5}{2}$. con 1. restando 1. de $\frac{5}{2}$. quedan $\frac{3}{2}$. Hagase aora la regla de tres: como 1. à $\frac{3}{2}$ assi V. 8. al quarto; con que multiplicando V. 8. por $\frac{3}{2}$. esto es, por V. $\frac{9}{4}$. (6.) serà el producto, $\frac{72}{4}$. que partido por 1. se queda como estaba, y reducido à enteros es 18. Digo, pues, que si de V. 50. se resta V. 8. el residuo es V. 18.

La demonstracion es la misma que la del modo 1. del sumar [9.] pues solo se varìa el termino segundo de la regla de tres, que en aquellos es la suma de los terminos de la razon; y en esta el residuo.

MODO II.

PArtanse entrambas raizes por el divisor comun, y saldràn dos quocientes, que siendo conmensurables las raizes, tendràn tambien su raiz: restese la raiz del quociente menor, de la del mayor; y multiplicando el residuo por el partidor comun, se sabrà la resta.

Exemplo 1. Se ha de restar V. 3. de V. 27. El partidor comun de 27. y 3. es V. 3. Partanse entrambas raizes por V. 3. y seràn los quocientes V. 9. y V. 1. esto es, 3. 1. restese la menor de la mayor, y serà el residuo 2. multipliquese el comun partidor V. 3. por 2. esto es, por 4. que es su quadrado; y el producto V. 12. es el residuo que se pide.

Exemplo 2. Se ha de restar V3. 32. de V3. 256. El ma-

mayor partidor comun es V3. 32. partiendo entrambas raizes por V3. 32. ſon los quocientes V3. 8. y V3. 1. eſto es, 2. 1. y reſtando la menor de la mayor, es el reſiduo 1. multiplicando el comun partidor V3. 32. por 1. es el producto V3. 32. Digo, pues, que reſtando V3. 32. de V3. 256. es el reſiduo tambien V3. 32. la razon ſe colige de lo dicho en el modo 2. de ſumar en la Propoſicion paſſada.

Quando las raizes ſon inconmenſurables, ſe reſtarà la vna de la otra con el ſigno —, como reſtando V. 8. de V. 24. ſerà la reſta V. 24. — V. 8. y aſsi en las demàs.

MODO III.

Eſpecial para las raizes quadradas.

SUmenſe las poteſtades de las raizes propueſtas; reſteſe de eſta ſuma el duplo de la raiz del producto de las miſmas poteſtades; y la raiz del reſiduo ſerà la reſta que ſe pide.*

Exemplo. Se ha de reſtar V. 48. de V. 75. la ſuma de 48. y 75. es 123. el producto de 75. por 48. es 3600. cuya raiz es 60. reſto, pues, 120. duplo de 60. de la ſuma 123. y es el reſiduo 3. y digo, que V. 3. es la reſta que ſe pretende.

Demonſtr. Supongo, que 75. es xx. y 48. es zz. reſtando V. zz. de V. xx. es el reſiduo x — z. con que lo que ſe ha de demonſtrar es, que x — z ∽ V. 3. demueſtraſe aſsi: El quadrado de x — z. es xx — 2xz + zz. el qual es, ſegun lo ſupueſto, igual à 75. mas 48. menos dos vezes el producto de la raiz del producto de 75. por 48. la qual es 60. porque ſiendo xxzz. lo miſmo que 3600. la raiz xz. ſerà 60. producto de las dos raizes; y 2xz ∽ 120. con que xx — 2xz + zz ∽ 75 — 120 + 48. Eſto es xx — 2xz + zz ∽ 3. luego V. xx — 2xz + zz ∽ V. 3. que es x — z ∽ V. 3.

CA-

CAPITULO III.

DE LA LOGISTICA DE LOS IRRACIONALES compueſtos.

LOS irracionales compueſtos proceden de la ſuma, ò reſta de dos magnitudes entre sì inconmenſurables. Con que pueden ſer, ò dos raizes irracionales inconmenſurables; ò raiz irracional, y numero, por ſer todo numero inconmenſurable con qualquiera raiz irracional; ſu logiſtica ſe comprehende en las Propoſicios ſiguientes.

PROP. XIV. Problema.

Sumar, y reſtar irracionales compueſtos.

1. *AUnque los terminos de cada compoſicion ſean entre sì inconmenſurables; pero los terminos de una pueden ſer, ò conmenſurables, ò inconmenſurables con los de otra, lo que ſe ha de averiguar. (8.) Los terminos que ſe huvieren hallado conmenſurables ſe ſumaràn por las reglas de la Prop. 9. ò ſe reſtaràn por la Prop. 10. advirtiendo, que las letras no varìan el modo de obrar, ſi ſon ſemejantes, y de un miſmo exponente. Los terminos que ſe hallaren inconmenſurables ſe ſumaràn con el ſigno +, y ſe reſtaràn con el ſigno —; y en todo caſo ſe obſervaràn las reglas de los ſignos acoſtumbrados. Entendidas las reglas de ſumar, y reſtar los irracionales ſimples, no ſe hallarà eſpecial dificultad en eſte punto, y aſsi baſtarà facilitar la practica con los exemplos.*

Exemplos del ſumar.

1.	2.
6 + V. 18.	V. 147. — 10.
10 + V. 8.	V. 12. + 8.
ſuma 16 + V. 50.	ſuma V. 243. — 2.

 En

En el exemplo 1. 6. y 10. son 16. la suma de V. 18. y V. 8. es V. 50. luego la suma de todo es 16. + V.50. assimismo en el segundo exemplo la suma de las raizes es V. 243. y la de los numeros es — 2.

3.	4.
V3. 10. + V.32.	V.15a3. + V3.16b2.
V3. 80. + 12.	V.60a3. — 15.x.
suma V3.270. + V.32. + 12.	V.135a3. + V3.16.b2. — 15x.

En el exemplo 3. sumando las dos raizes cubicas, es la suma V3,270. y porque los otros terminos son inconmensurables, se suman con el signo +. En el exemplo 4. la suma de las dos raizes es V.135a3. donde se vè no varian las letras la operacion por ser semejantes, y de vn mismo exponente; los demàs terminos, por ser inconmensurables, se suman con los signos, segun las reglas generales.

Exemplos del restar.

1.	2.
V.27. + V.32.	V3.270. — 4.
V.12. + V.2.	V3.10. + 12.
resta V.3. + V.18.	resta V3.80. — 16.

En el exemplo 1. restando V. 12. de V. 27. es el residuo V.3. y restando V.2. de V.32. es el residuo V.18. En el segundo exemplo, es el residuo de las raizes V3.80. y restando + 12. de — 4. es el residuo — 16.

Quando en el restar ay terminos conmensurables, y otros inconmensurables, se restan los conmensurables como antes, pero los inconmensurables, se restan, dandoles los signos opuestos à los que tenian antes. Quando concurren letras se obrarà del mismo modo, si son semejantes, y de vn mismo exponente, como se vè en los exemplos siguientes.

1.	2.
V. 50a + V3.x2.	+ V.2z2. — 2a.
V. 32a — 12.	— V.18z2. + 3a.
resta V.2a + V3.x2. + 12.	resta + V.32z2. — 5a.

En

En el primero, restando $\sqrt{}$. 32a. de $\sqrt{}$. 50a. es el residuo $\sqrt{}$.2a. y restando — 12. de $\sqrt{}$3. x2. es el residuo $\sqrt{}$3. x2. + 12. En el segundo, por llevar las raizes signos opuestos se suman, y se pone el signo del superior; y assi es la resta + $\sqrt{}$.322z. y restando + 3a. de — 2a. es la resta — 5a. y assi en los demàs.

PROP. XV. Problema.

Multiplicar irracionales compuestos.

1. *Raizes por raizes se multiplican del modo dicho en la Prop. 6. reduciendolas primero, si fuere menester, à vna misma denominacion. Las raizes se multiplican por numeros, multiplicandolas por las potestades de los numeros; numeros por numeros, llanamente; pero en todo caso se ha de observar la ley de los signos, que siendo semejantes, tiene siempre el producto el signo +; y siendo desemejantes, tiene el signo —.*

2. *Los productos de la multiplicacion se sumaràn por la Prop. 9. y la suma se procurarà reducir quanto se pudiere.*

3. *Esta reduccion tiene lugar siempre que en el multiplicador, y multiplicando concurren numeros; y las raizes que ay en el vno fueren conmensurables con las que ay en el otro.*

Exemplo 1.

A. 6 — $\sqrt{}$.20.
B. 8 — $\sqrt{}$.45.

Producto. C. 48. — $\sqrt{}$.1280 — $\sqrt{}$.1620 + $\sqrt{}$.900.
Reducido. D. 78 — $\sqrt{}$.5780.

La magnitud A. se ha de multiplicar por la magnitud B. multiplicando, pues, — $\sqrt{}$.20. por — $\sqrt{}$. 45. sale $\sqrt{}$. 900. multiplicando 6. por — $\sqrt{}$. 45. esto es, 36. por 45. sale — $\sqrt{}$. 1620. multiplicando — $\sqrt{}$. 20. por 8. esto es, por 64. sale — $\sqrt{}$. 1280. y 8. por 6. dà 48. con que sale el producto C. y porque $\sqrt{}$. 900. es 30. sumando 30. con 48. haze 78. y sumando — $\sqrt{}$. 1280. con — $\sqrt{}$. 1620. resulta — $\sqrt{}$. 5780. y es D. la suma reducida.

Exem-

Exemplo 2. E. $V4.288 - V4.648.$
F. $V4.128. - V4.162.$

G. $V4.36864 - V4.82944 - V4.46656 + V4.104976.$

H. $V.192 - V.288 - V.216 + 18.$

La cantidad E. se ha de multiplicar por la cantidad F. siguiendo la regla dada, sale el producto G. para reducirlo, hallo que solo el vltimo termino tiene $V4.$ justa, que es 18. y assi le escrivo en lugar suyo; los demàs terminos solo tienen $V2.$ justa, que tambien escrivo en lugar de cada vno de ellos; y sale el producto reducido H.

Exemplo 3. L. $2 + V.45.$
M. $2 - V.45.$

N. $4 + V.180 - V.180 - 45.$
P. $4 - 45.$

Multiplicando la cantidad L. por la cantidad M. sale el producto N. en el qual se destruyen el segundo, y tercer termino; y assi quedan solos el primero, y vltimo en P. El vltimo es 45. porque multiplicando $V.45.$ por $V.45.$ sale su quadrado.

Quando los productos son inconmensurables, no se pueden reducir; y assi se sumaràn, escriviendo vno despues de otro con sus proprios signos.

5. En las magnitudes literales, se guardan las mismas reglas; esto es, que si las letras, y exponentes son semejantes, se procederà como en el numero 1. 2. y 3. dandole al producto la misma letra, y sumando los exponentes; pero siendo las letras, ò exponentes diferentes, ò siendo las raizes inconmensurables, no se podràn reducir los productos; sì que se suman escriviendo seguidamente vn producto despues del otro con sus proprios signos.

Exem-

Exemplo 4. Q. $6x2. - \sqrt{.20.x2}.$
R. $8x2. - \sqrt{.45.x2}.$

S. $48x4. - \sqrt{.1280.x4}. - \sqrt{.1620x4}. + \sqrt{.900.x4}.$
T. $48.x4. - \sqrt{.5780x4}. + 30x2.$

Este exemplo es el mismo que està en primer lugar de esta Proposicion, añadidas solamente a sus terminos las potestades x2. con que multiplicando Q. por R. sale el producto S. que se reduce à la suma T.

PROP. XVI. Problema.

Partir irracionales compuestos.

1. *Para partir vna raiz por vn numero absoluto, ò al contrario, se harà la particion por la potestad de dicho numero semejante à la raiz; con que antes de partir, se ha de subir el numero à la potestad de cada raiz de las que concurrieren en la magnitud.*

Exemplo. Se ha de partir $\sqrt{.20} - \sqrt{3.16}.$ por 2. Para partir $\sqrt{.20}.$ por 2. subo el 2. al quadrado 4. y partiendo dicha raiz por 4. es el quociente $\sqrt{.5}.$ passo à partir $\sqrt{3.16}.$ por 2. y le subo al cubo 8. y hecha la particion es el quociente $-\sqrt{3.2}.$ y es todo $\sqrt{.5}. - \sqrt{3.2}.$

2. *Para partir vna composicion de diferentes raizes por vna raiz simple, se reducirà, si fuere menester, la inferior à la misma denominacion de la superior; y luego se harà la particion, segun las reglas de la Prop. 7.*

Exemplo 1. Se ha de partir $\sqrt{3.20} + \sqrt{3.48}.$ por $\sqrt{3.4}.$ No ay que reducir por ser todas de vna misma denominacion; y assi se partirà llanamente 20. por 4. y 48. por 4. y serà el quociente $\sqrt{3.5} + \sqrt{3.12}.$

Exemplo 2. Se ha de partir $\sqrt{4.8}. - \sqrt{5.3}.$ por $\sqrt{.2}.$ Empiezo la particion, y para partir $\sqrt{4.8}.$ por $\sqrt{.2}.$ subo el partidor à igual potestad con $\sqrt{4.8}.$ multiplicando el 2. por si mismo, y doblando el exponente, y serà $\sqrt{4.4}.$ parto, pues, $\sqrt{4.8}.$ por $\sqrt{4.4}.$ y es el quociente $\sqrt{4.2}.$ Passo aora à partir $-\sqrt{5.3}.$ por $\sqrt{.2}.$ y lo primero les reduz-

duzgo à vna misma denominacion ; (5.) y serà el dividendo $\sqrt{}$ 10. 9. y el partidor $\sqrt{}$ 10. 32. y partiendo aquel por este, sale el quociente $-\sqrt{}10. \frac{9}{32}$. y tengo el quociente total $\sqrt{}$ 4. 2. $-\sqrt{}$ 10. $\frac{9}{32}$.

3. Quando no solo el dividendo, si tambien el partidor es compuesto de dos raizes quadradas, antes de partir se reduciràn los terminos del dividendo, y divisor, si fuere menester, à vn comun denominador. 2. El divisor se escrivirà à parte, y se le variarà el signo del segundo termino en su opuesto, y servirà de multiplicador. 3. Se multiplicarà tanto el dividendo, como el divisor por el sobredicho multiplicador, y entrambos productos se reduciràn quanto fuere possible. Ultimamente se partirà el producto del dividendo por el del partidor, y el quociente serà el que se pretende.

Para que se haga mas claro concepto de la regla propondrè primeramente vn exemplo en numeros racionales, y despues otro en irracionales.

Exemplo 1. Hase de partir 42. por $\sqrt{}$. 25. + $\sqrt{}$. 4. esto es, por 7. pero supongamos se ignora este numero, como tambien el quociente 6. El partidor con el signo opuesto en el segundo termino es $\sqrt{}$. 25 — $\sqrt{}$. 4. multiplico, pues, el dividendo 42. por $\sqrt{}$. 25 — $\sqrt{}$. 4. y serà el producto $\sqrt{}$. 44100 — $\sqrt{}$. 7056. y sacando sus raizes es 210 — 84. esto es, 126. multiplico aora el divisor $\sqrt{}$. 25 + $\sqrt{}$. 4. por el mismo $\sqrt{}$. 25 — $\sqrt{}$. 4. y serà el producto, por destruirse mutuamente los terminos intermedios, $\sqrt{}$.625 — $\sqrt{}$. 16. esto es, sacadas las raizes, 25 — 4. que es 21. parto, pues 126. por 21. y es el quociente 6. como se deseaba.

Puedese abreviar la operacion, escusando la multiplicacion del partidor, quando este consta solo de dos terminos, y tomando por partidor la diferencia de sus dos numeros; como en este caso se ha tomado 25 — 4. que es 21.

La demonstracion de esta regla consiste en vn principio bien sabido, que si dos numeros se multiplican por vno mismo, los productos conservan la misma razon que tenian los numeros antes de ser multiplicados: y por consiguiente, partiendo el vno por el otro vendra el mismo quo-

quociente, tanto, que se partan antes, como despues de multiplicados, por ser el quociente el que expressa la razon del dividendo, y divisor, que como dixe, es siempre la misma: luego multiplicandose segun esta regla, el dividendo, y divisor por vn mismo multiplicador, siempre vendrà el mismo quociente. Eligese por multiplicador el mismo partidor variado el signo, para que destruyendose mutuamente los terminos intermedios, quede reducido el partidor à vn solo termino conocido, y sea facil la operacion.

Exemplo 2. Se ha de partir V. 50 -+ 8. por V. 8. -+ 2. Reducidos los numeros al denominador mismo de V2. son V. 50 -+ V. 64. y V. 8 -+ V. 4. mudando el signo del partidor, serà el multiplicador V. 8 — V. 4.

Dividendo.	V. 50 -+ 8.
Divisor.	V. 8 -+ 2.
Dividendo reducido.	V. 50 -+ V. 64.
Divisor reducido.	V. 8 -+ V. 4.
	V. 50 -+ V. 64.
Multiplicador.	V. 8 — V. 4.
A.	— V. 200 — V. 256.
B. -+ V. 400 -+ V. 512.	
suma C. V. 400 -+ V. 72 — V. 256.	
suma reducida.	V. 72 -+ 4.

Multiplicando V. 50 -+ V. 54. por V. 8. — V. 4. salen los productos A. y B. que sumados hazen la suma C. que reducida, sacando las raizes de 400. y de 256. es V. 72. -+ 4. La diferencia de los numeros del partidor V. 8. — V. 4. es 4. Parto, pues, vltimamente V. 72 -+ 4. por 4. esto es, la V. 72. por V. 16. y el 4. por 4. y es el quociente V. $\frac{9}{2}$ -+ 1.

4. *Quando el partidor consta de tres magnitudes afectas con el signo*

ſigno +, ſe mudarà el ſigno del vltimo termino, y el miſmo partidor con ſola eſta variacion ſerà el multiplicador comun; pero ſerà meneſter muchas vezes hazer diferentes multiplicaciones, haſta que el partidor ſe venga à reducir à vna magnitud racional, ò ſimple, como ſe ve en el exemplo ſiguiente.

Exemplo. Se ha de partir el numero 100. por V.3. + V.5 + V.6. reducido el 100. à la denominacion miſma del partidor, es V.10000. y mudado el vltimo ſigno del partidor, es el comun multiplicador V.3 + V.5 — V.6.

Dividendo. 100. Dividendo. V.10000.
Diviſ. V.3 + V.5 + V.6. Multip. V.3 + V.5 — V.6.

Nuevo divid. A. + V.30000 + V.50000 — V.60000.
Nuevo diviſ. B. V.60 + 2.

Nuevo multip. C. V.60 — 2. eſto es, V.60 — V.4.
Nuevo divid. D. V.1800000 + V.3000000 + V.240000 — V.3600000 — V.120000 — V.200000.
Nuevo diviſor V.3600 — V.16. eſto es, 56.

Multiplicando V.10000. por V.3 + V.5 — V.6. ſale el nuevo dividendo A. y multiplicando por eſte miſmo multiplicador el diviſor dado, es el nuevo diviſor B. y porque aun no es racional, ni ſimple: tomo por nuevo multiplicador al notado con C. y multiplicando al dividendo A. por eſte nuevo multiplicador C. ſale otro nuevo dividendo D. y aſsimiſmo, multiplicando al diviſor B. V.60 + 2. eſto es, V.60 + V.4. por el miſmo nuevo multiplicador C. ſale por nuevo diviſor V.3600 — V.16. eſto es, 60 — 4. que es 56. y partiendo el dividendo D. por 56. ſaldra el quociente que ſe deſea, que ſera el miſmo, que ſi 100. ſe partieſſe por V.3 + V.5 + V.6. lo que ſe podra examinar por la multiplicacion.

5. De la miſma ſuerte ſe procederà quando el partidor conſta de tres magnitudes, la primera poſitiva, y las demàs negativas, como en el exemplo ſiguiente.

Exemplo. Se ha de partir 18. por V.10 — V.5 — V.2.

re-

reducido el 18. à la denominacion del partidor es √. 324. Y mudando el vltimo signo del partidor en su opuesto, es el multiplicador comun √. 10 — √. 5 + √. 2.

Dividendo 18.
Part. √. 10 — √. 5 — √. 2.

Dividendo √. 324.
Mult. √. 10 — √. 5 + √. 2.

Nuevo dividendo. A. √. 3240 — √. 1620 + √. 648.
Nuevo divisor. B. √. 200 — 13.
Nuevo multip. C. √. 200 + 13. esto es, √. 200 + √. 169

Nuevo dividendo. D. √. 648000 + √. 547560 + √. 129600 + √. 109512 — √. 324000 — √. 273780.
Nuevo divisor. √. 40000 — √ 28561. esto es, 31.

Multiplicando √. 324. por √. 10 — √. 5 + √. 2. sale el nuevo dividendo A. y multiplicando por el mismo multiplicador el divisor dado, resulta el nuevo divisor B. y por no ser aun racional, ni simple, tomo por nuevo multiplicador al notado con C. y multiplicando al dividendo A. por el nuevo multiplicador C. sale otro nuevo dividendo D. multiplicando tambien al divisor B. √. 200 — 13. esto es, √. 200 — 169. por el mismo C. sale por nuevo divisor √. 40000 — √. 26561. esto es, 31. Partiendo, pues, el dividendo D. por 31. saldrà el quociente que se pide.

6. *En las cantidades literales se hazen las mismas operaciones, siendo las letras semejantes, y de vn mismo exponente; cuidando de sumar los exponentes en la multiplicacion, y de restarles en la particion: en lo demàs se obra con el mismo orden, por lo qual no añado mas exemplos.*

7. *Aunque estas reglas valen tambien para las demàs especies de raizes; pero quando el exponente de estas fuere 3. 4. 5. &c. es mejor, y mas facil formar quebrado, poniendo la cantidad, que se ha de partir por numerador; y al partidor por denominador sin mudar cosa alguna, y lo mismo se harà quando concurrieren diferentes letras, ò aunque sean semejantes, tuvieren diferente exponente: omito otras reglas particulares, por ser prolixas, y de poco provecho.*

CA-

CAPITULO IV.

DE LA LOGISTICA DE LAS RAIZES vniversales.

RAizes vniversales, ò ligadas son las de los irracionales compuestos; de que se sigue, que para sacar la V2. de este compuesto 10 + V.15. se cierra el compuesto en vn parenthesis, y se pone antes el signo radical con su proprio exponente, en esta forma, V.2.(10 + V.15.) que quiere dezir, raiz quadrada de todo el compuesto 10 + V.15. de suerte, que los irracionales compuestos son potestades de las raizes vniversales; y estas son raizes de los irracionales compuestos; con que para hallar la potestad de qualquiera raiz vniversal, basta borrar el signo radical V. y para señalar su raiz, basta poner antes el sobredicho signo V. con su proprio exponente.

PROP. XVII. Problema.

Sumar, y restar raizes vniversales.

LAs raizes vniversales se suman con el signo +, y se restan con el signo —, sin mas artificio: solo es menester advertir, que en el restar se puede ofrecer la duda, de qual de las dos raizes es menor para restar la de la mayor, que se resolverà sacando la raiz proxima de los irracionales; como si se dudasse, que raiz es mayor de las dos siguientes: V. [7 + V. 13.] y V. (13 — V. 7.) sacando pues, la raiz quadrada de 13. se hallarà proxima $3.\frac{60}{100}$. que sumada con el 7. es $10.\frac{60}{100}$. y es casi lo mismo que 7 + V. 13. Assimismo, sacando la raiz proxima de 7. se hallarà ser $2.\frac{64}{100}$. que restada de 13. quedan $10.\frac{36}{100}$.

que

que es casi lo mismo que 13 — V.7. luego siendo $10\frac{60}{100}$. mayor que $10\frac{36}{100}$. serà la potestad 7 + V.13. mayor que 13 — V.7. y por consiguiente V.(7 + V.13.) serà mayor que V.[13 — V.7.]

PROP. XVIII. Problema.

Multiplicar raizes vniversales.

1. Para hazer esta multiplicacion, es menester que las raizes que se han de multiplicar sean de vna misma denominacion, ò exponente; y si no lo fueren se han de reducir. (5.)

2. El multiplicador, y multiplicando se han de reducir à quadrado, ò cubo, &c. segun fuere el exponente de la raiz vniversal; y luego se harà la multiplicacion por las reglas de la Prop. 12. Advierto, que para reducir la raiz vniversal à quadrado, ò cubo, &c. basta borrar el signo V. que precede al parenthesis, como dixe: el numero se reduce por su continua multiplicacion.

Exemplo 1. Se ha de multiplicar V.(3 + V.5.) por 2. reducido todo à la denominacion de raiz quadrada: esto es, à quadrados, es el multiplicando el quadrado 3 + V.5. y el multiplicador es 4. quadrado de 2. Hecho esto, multiplico V.5. por 4. esto es, por V.16. que es multiplicar 5. por 16. y es el producto V.80. multiplico 3. por 4. y es el producto 12. con que todo el producto es V.(12 + V.80.)

La demonstracion consta de lo dicho en la Prop. 6. y 12. solo advierto, que la razon de multiplicar V.5. por V.16. subiendo el 2. primero à su quadrado 4. y despues a su quadr.-quadr. 16. consiste en que V.[V.5.] es lo mismo que raiz quadr.-quadr. 5. luego el multiplicador 2. ha de subir à su quadr.-quadr. 16. para hazer la multiplicacion, segun la regla 2. Prop. 6. Para que todo esto conste con mayor claridad, veanse los siguientes exemplos en terminos racionales.

Exemplo 2. Sea la raiz vniversal V.[7 + V.4.] cuyo quadrado 7 + V.4. es lo mismo que 9. y su raiz es 3.

Pidese, que dicha raiz vniversal se multiplique por 2. y siguiendo la regla, multiplico 7. por 4. que es quadrado de 2. y es el producto 28. multiplico aora V. 4. no por 4. si por 16. y es el producto V. 64. y el producto total es V. (28 + V. 64.) esto es, V. (28 + 8.) ò V. 36. que es 6. producto de 3. raiz vniversal propuesta por el multiplicador 2.

Exemplo 3. Se ha de multiplicar V3. [V3. 64 + V. 36. + 17.] por 2. reducidos el multiplicando, y multiplicador à sus cubos, por ser la raiz vniversal cubica, son V3. 64 + V. 36 + 17. y 8. que es cubo de 2. con que el 17. se ha de multiplicar por 8. el 36. por 64 y el 64. por 512. segun la regla dada, que manda elevar el multiplicador a la potestad de la raiz que se multiplica: hecha, pues, la multiplicacion es el producto A. que reduciendolo à numeros será V3. 216. que es 6. lo que es producto de la raiz vniversal propuesta, que es 3. por 2.

V 3. (V 3. 64 + V. 36. + 17.)
512. 64. 8.)

A. V3. (V3. 32768 + V. 2304 + 136.)

3. *Quando el multiplicador es compuesto, se multiplicarà todo el multiplicando, primeramente por el segundo termino del multiplicador, y despues por el primero, observando en cada multiplicacion las mismas reglas que en las antecedentes, como se vè en el exemplo siguiente, que tambien consta de terminos racionales.*

Exemplo 4. Se ha de multiplicar V. (13 + V. 9.) por V. [5 + V. 16.] que si se reducen à numeros es lo mismo que pedir se multipliquen 4. por 3. cuyo producto es 12. Sigamos aora la regla dada, y veremos como por ella sale el mismo producto 12.

A. 13 + V. 9.
B. 5 + V. 16.

C. V. (65 + V. 225. + V. 2704 + V. 144.)

Los quadrados de las raizes propuestas son A. y B. mul-

multiplico, pues, √. 9. por √. 16. y sale el producto √. 144. multiplico 13. esto es, su quadrado 169. por √. 16. y sale √. 2704. hecho esto, multiplico √ 9. por 5. esto es, por su quadrado 25. y sale √. 225. vltimamente multiplico 13. por 5. y sale 65. y el producto total es C. y sacando las raizes de los terminos, se hallan ser 65. 15. 52. 12. cuya suma es 144. luego el producto es √. 144. que es 12.

PROP. XIX. Problema.

Partir raizes vniversales.

1. *LAS reglas del partir, corresponden à las del multiplicar; pues assi como se multiplican las raizes, multiplicando sus potestades, tambien se parten partiendo las potestades de las mismas raizes; lo que se haze claro con los exemplos siguientes.*

Exemplo 1. La raiz vniversal √. (28 + √. 48.) se ha de partir por 2. los quadrados del dividendo, y divisor son 28 + √. 48. y 4. Parto √. 48. por 4. esto es, por √. 16. y es el quociente √. 3. parto 28. por 4. y es el quociente 7. con que todo el quociente es √. (7 + √. 3.) la demonstracion es la misma que la del multiplicar por la mutua correspondencia de las reglas. La prueba es, que multiplicando este quociente por 2. sale √. (28 + √. 48.)

Exemplo 2. Se ha de partir √3. (√3. 32768 + √. 2304. + 136.) por 5. Reducido el dividendo, y partidor a cubo, son √3. 32768 + √. 2304 + 136. y 125. y hecha la particion de el cubo de el dividendo por 125. es el quociente √3. (√3. 64. + √. 36 + 17.) y multiplicando este quociente por 5. sale en el producto la raiz vniversal propuesta, como se vio en el exemplo 3. de la proposicion passada.

2. *Quando el partidor es compuesto, ò es tambien raiz vniversal, reducidos los terminos à la misma denominacion de la raiz, se variarà el signo del partidor en su opuesto, y serà vn comun multiplicador, por quien se multiplicaràn el dividendo, y divisor, segun dixe en la Propos. 16. num. 2. para que reducidos entrambos à terminos mas simples, y racionales, se haga la particion con*

la facilidad que ſe viò en el lugar citado, y ſe vè en el exemplo ſiguiente.

Exemplo 3. Se ha de partir V. (588 + V. 34848.) por V. (12 + V. 8.) reducidos à ſus quadrados ſeràn el dividendo, y diviſor las miſmas magnitudes, quitado el ſeñal V. que precede el parentheſis, con que el partidor es 12 + V. 8. y por ſer compueſto, ſe variara ſu ſigno, y ſerà el comun multiplicador 12 — V 8. multiplicando, pues, V. 34848. por V. 8. ſale V. 278784. y multiplicando 588. eſto es, V. 345744. por V. 8. ſale V. 2765952. con los ſignos que pide la regla general. Deſpues, multi-

		588 + V. 34848.
		12 — V. 8.
	— V. 2765952	— V. 278784.
+ 7056 + V. 5018112.		
Producto.		6528 + V. 332928.
Diferencia.		136.
Quociente.		48 + V. 18.

plicando V. 34848. por 12. eſto es, por V. 144. ſale V. 5018112. y multiplicando 588. por 12. ſale 7056. La raiz quadrada de 278784. es 528. quitada de 7056. quedan 6528. y quitando V. 2765952. de V. 5018112. queda V. 332928. y reducido todo, es el producto 6528 + V. 332928. El partidor era 12 + V 8. que es lo miſmo que V. 144 + V. 8. la diferencia de ſus numeros es 136. y eſta ha de ſervir de partidor; partaſe, pues, 6528 + V. 332928. por 136. por el num. 1. y ſaldrà el quociente 48 + V. 18. y cerrado en vn parentheſis con el ſigno radical, ſerà V. (48 + V. 18.) el quociente que ſe buſca.

Para evitar eſte trabajo ſe pueden hazer eſtas particiones diſponiendo vn quebrado, cuyo numerador ſea el dividendo; y el denominador, el partidor propueſto; lo que ſerà preciſo quando concurrieren letras diferentes, lo que es frequente en las magnitudes literales.

CA-

CAPITULO V.

DE LOS BINOMIOS, Y RESIDUOS.

LLamanſe comunmente *Polynomios*, los irracionales compueſtos de muchos terminos, ò nombres; ſi ſe componen de dos terminos, ſe llaman *Binomios*, ſi de tres, *Trinomios*, &c. Si ſe componen de dos terminos, ò nombres con el ſigno +, ſe llaman con eſpecialidad, *Binomios*, como $\sqrt{}.15 + \sqrt{}.8.$ ſi ſe componen con el ſigno —, ſe llaman, *Apotomes*, ò *Reſiduos*, como $\sqrt{}.15 - \sqrt{}.8.$ à diferencia de los otros.

Pero hablando con mayor rigor, y ſegun Euclides en el lib. 10. Propoſic. 37. y 74. *Binomios*, ſon aquellos irracionales compueſtos con el ſigno +, que ſiendo inconmenſurables en *Longitud*, ſon en *potencia* conmenſurables: eſto es, que ſus raizes ſean inconmenſurables, y ſus quadrados conmenſurables; y eſtos miſmos compueſtos con el ſigno —, ſon en rigor, *Apotomes*, ò *Reſiduos*. y aſsi $6 + \sqrt{}.20.$ es riguroſo binomio: y $6 - \sqrt{}.20.$ es Apotome; por ſer el 6. y la raiz de 20. inconmenſurables; y ſus quadrados 36. y 20. conmenſurables. Tambien $\sqrt{}.24. + \sqrt{}.18.$ es propriamente Binomio: y $\sqrt{}.24. - \sqrt{}.18.$ es Apotome por la miſma razon.

De que ſe infiere, que no ſon Binomios, ni Apotomes los compueſtos de dos raizes conmenſurables, aora ſean racionales, ò irracionales, como $6 + \sqrt{}.9.$ item, $6 - \sqrt{}.9.$ porque la raiz de 9. es 3. conmenſurable con 6. item, $\sqrt{}.12 + \sqrt{}.3.$ ò $\sqrt{}.12 - \sqrt{}.3.$ por ſer eſtas raizes conmenſurables: (8.) ni tampoco lo ſon $\sqrt{4}.10. + \sqrt{4}.8.$ ò $\sqrt{4}.10 - \sqrt{4}.8.$ por ſer ſus quadrados $\sqrt{}.10 + \sqrt{}.8.$ y $\sqrt{}.20 - \sqrt{}.8.$ inconmenſurables.

Euclides, y comunmente los Algebricos diſtinguen ſeis eſpecies de Binomios; y otras tantas de Apotomes, que omito, por no ſer neceſſarias para nueſtro intento; ſingu-

gularmente hallandose sus raizes, como tambien las de los Binomios impropios, por vna misma regla general.

PROP. XX. Problema.

Conocer qual sea el nombre, ò termino mayor en los Binomios, y Apotomes.

LOS terminos, ò partes de vn Binomio, ò Apotome, se llaman comunmente, *Nombres*: El termino mayor, se llama *Nombre mayor*, y el menor, *Nombre menor*. Hallase qual sea el mayor por la regla siguiente.

Aquel nombre es mayor, cuyo quadrado es mayor. Con que si los dos nombres son raizes; la que tiene mayor numero, es *nombre mayor*, como en este Binomio V. 24. + V. 18. el nombre mayor es V. 24. Si el vn nombre es numero, y el otro raiz quadrada, se reducirà el numero à V. multiplicandole por sì mismo, y poniendole antes el signo radical, con que se sabrà como antes, qual sea el nombre mayor; como 6 + V. 20. hecha la reducion, es V. 36 + V 20. es, pues, 6. el nombre mayor.

PROPOS. XXI. Problema.

Hallar la raiz quadrada de los Binomios, y Apotomes.

1. *REstese el quadrado del nombre menor, del quadrado del mayor, y saquese la raiz quadrada de la resta.* 2. *Sumese esta raiz con el nombre mayor, y resultarà vna suma; restese del mismo nombre mayor, y se tendrà vn residuo.* 3. *Tomese la mitad de dicha suma, y la mitad del residuo, y saquense sus raizes quadradas; y estas raizes, vna de la semisuma, y otra del semiresiduo, juntas con el signo +, son raiz quadrada del Binomio; y juntas con el signo —, son la raiz quadrada del Apotome.*

Exemplo 1. Pidese la raiz quadrada de 23 + V. 448. ù del Apotome 23 — V. 448. el quadrado de 23. es 529. el de V. 448. es 448. cuya diferencia es 81. que tiene 9. por raiz; añadiendo 9. al nombre mayor 23. haze la suma 32. y quitada del mismo 23. haze el residuo 14. La semisuma ès 16. y semiresiduo es 7. cuyas raizes son V. 16. y V. 7.

esto

esto es, 4. y V. 7. juntas con el signo +, serà la raiz quadrada del Binomio 4 + V. 7. y juntas con el signo —, serà la del Apotome 6 — V. 7.

Esta regla es general, no solo para todas las especies de Binomios, y Apotomes proprios; sì tambien para los improprios, como se vè en el exemplo siguiente.

Exemplo 2. Pidese la raiz quadrada del Binomio improprio V. 25 + V. 16. que yà se vè ser 3. pero sigamos la regla: Los quadrados de los nombres son 25. y 16. cuya diferencia es 9. su raiz quadrada 3. añadida al mayor nombre V. 25. esto es, à 5. haze 8. y restada del mismo, quedan 2. sus mitades son 4 y 1. Las raizes de estas mitades son 2. y 1. con que la raiz del Binomio es 2 + 1. que es lo mismo que 3.

La *demonstracion* es facil, y la omito por no ser menester; vease en el P. Miliet, lib. 3. de la Algebra Prop. 39. y 40. la prueba serà multiplicar la raiz hallada por si misma, y resultarà el Binomio, ò Apotome, sino se huviere errado la operacion.

Los quebrados de los irracionales tienen las mismas reglas, que la logistica de los numeros vulgares; solo que en el sumar, y restar, multiplicar, y partir sus terminos, se han de observar las reglas dadas en la logistica de los irracionales, por lo qual no me detengo mas en ello.

CAPITULO VI.

RESUELVENSE ALGUNAS QUESTIONES de cantidades irracionales.

LAs mismas reglas de la Algebra, que sirven para resolver las questiones de magnitudes racionales; sirven para la resolucion de las irracionales, solo se diferencian en la logistica explicada en las Proposiciones antecedentes, y assi pocos exemplos bastaràn para la inteligencia perfecta de este assumpto.

QUESTION I.

Hallar dos numeros en razon de 2. à 3. cuyo producto sea 180.

SUpongo sea el primero 2x. y el segundo 3x. su producto es 6xx $\propto$ 180. luego xx $\propto$ 30. luego x $\propto$ V. 30. es, pues, el primer numero 2V. 30. y el segundo 3V. 30. esto es, hecha la suma [9.] V. 120. y V. 270. los quales tienen entre si la razon de 2. con 3. como se puede vèr por la Prop. 8. y multiplicando el vno por el otro [6.] se hallarà el producto V. 32400. que es 180. como se pide.

QUESTION II.

Hallar dos numeros, como 2. à 3. tales, que la suma de sus quadrados sea 130.

SEa el primero 2z. el segundo 3z. sus quadrados son 4zz. y 9zz. la suma de estos quadrados es 13zz $\propto$ 130. luego zz $\propto$ 10. luego z $\propto$ V. 10. este valor de z. multiplicado por 2. y por 3. darà el valor de los dos numeros que se piden, que (6.) seràn V. 40. y V. 90. la suma de sus quadrados, que son 40. y 90. es 130. como se pide.

QUESTION III.

Hallar dos numeros, cuya suma sea 10. y el producto 18.

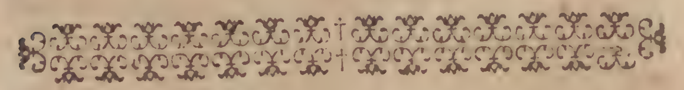
ESta, y semejantes questiones, se resuelven con mayor facilidad planteandolas por las reglas dadas en el libro 5. cap. 7. en la forma siguiente, porque se sabe la suma 10. de los numeros, y se ignora su diferencia; supongo sea la diferencia 2y. con que el numero mayor serà 5 + y. y el menor, 5 — y. multiplicando el vno por el otro es el producto 25 — yy $\propto$ 18. y por Antithesi yy $\propto$ 25 — 18. luego y $\propto$ V. (25 — 18.) esto es, y $\propto$ V. 7. substituyo aora este valor de y. en los primeros supuestos, y serà el numero mayor 5 + V. 7. y el menor serà 5 — V. 7. y queda satisfecha la question, porque la suma de entrambos por la construccion misma es 10. y si se multiplica el vno

vno por el otro [12.] es el producto 25 — *V*. 49. que es 25 — 7. esto es, 18. como se desea.

QUESTION IV.

Hallar dos numeros, cuya diferencia sea 4. y su producto 34.

POr ser la diferencia 4. conocida, è ignorarse la suma de los numeros que se piden, supongo sea la suma 2v. con que el numero mayor es v + 2. y el menor v — 2. su producto es vv — 4 ∽ 34. luego por Antithesi vv ∽ 38. luego v ∽ *V*. 38. substituido el valor de v. en su lugar en las primeras suposiciones, es el numero mayor *V*. 38. + 2. y el menor *V*. 38 — 2. cuya diferencia por construcion es 4. y su producto es (12.) *V*. 1444 — 4. esto es, 38 — 4. que es 34. como se pide.



LIBRO VIII.

DE LA APLICACION de la Algebra à la Geometria.

AUnque la Geometria tiene sus principios ciertos, y evidentes, bastantes para la resolucion de qualesquiera dificultades pertenecientes à la cantidad continua, que es su objeto; pero no es dudable, que el ingenioso artificio de la Arte Analytica, que hemos explicado, da gran facilidad, no solo para hallar dichas resoluciones; si para enriquecer la Geometria con nuevos Theoremas, y Problemas; y supuesto que las re-

reglas que se han dado son indiferentes para qualquiera especie de magnitud , juzgo serà bastante aplicarlas à la resolucion de algunas questiones.

PROP. I. Theorema.

Explicase la variedad de los Problemas Geometricos.

LOs Problemas Geometricos pueden ser *determinados* , ò *indeterminados*. Los *determinados* solo tienen vna solucion , ò vn numero determinado de soluciones : Los *indeterminados* , que tambien se llaman *locales* , pueden tener infinitas.

Los Problemas determinados pueden ser *simples* , ò *lineares*, *planos*, *solidos*, y *sursolidos*: esto es,mas que solidos. Problema *simple* , ò *linear* es , el que se puede resolver en Geometria por la interseccion de dos lineares rectas , de que se sigue no poder tener mas que vna solucion , por no poderse cortar dos rectas mas que en vn solo punto. *Problema plano* es , el que no se puede resolver en Geometria menos que con la interseccion de los circunferentes de circulo , ù de vna circunferencia de circulo , y vna linea recta ; de que se colige , que vn Problema plano no puede tener mas que dos soluciones , por quanto , ni dos circulos entre si , ni vn circulo , y vna recta se pueden cortar mas que en dos puntos. *Problema solido* es , el que no se puede resolver en Geometria menos que por interseccion de vna circunferencia de circulo , y de otra qualquiera seccion conica ; ò por interseccion de dos secciones conicas ; de que se infiere que el Problema solido no puede tener mas que quatro soluciones , por no poderse cortar dos secciones conicas mas que en quatro puntos. *Problema sursolido* es , el que no se puede resolver en Geometria , menos que por dos lineas curvas de vn genero mas elevado que las secciones conicas , como son la Quadratriz , la Cissoyde, la Concoyde, y otras , cuya explicacion no es para este lugar. Resolverè aqui por Algebra algunos Problemas lineares , y planos, que aunque pocos , seràn bastantes para que el Geometra vea la methodo con que esta Arte Analytica se aplica à

la

la Geometria, dexando los ſolidos para otro lugar mas conveniente.

PROPOS. II. Problema,

Explicaſe la methodo del Analyſi Geometrica.

EL artificio de la Arte Analytica, en las queſtiones Geometricas, viene à ſer el miſmo que en otras qualeſquiera; pues como ſe puede vèr en la mayor parte de las que hemos reſuelto, ſe han buſcado en ellas las magnitudes con indiferencia à que fueſſen cantidades continuas, ò diſcretas. Entendida, pues, la queſtion, ſe formarà (ſi fuere meneſter) ſu mapa, en que ſe ſupondrà como hecho, y conſtruido lo que ſe pide. Hecho eſto, ſe pondran en lugar de las lineas, ò magnitudes incognitas, las vltimas letras del Abecedario; y en lugar de las dadas, ò conocidas, ſe ſupondran las primeras: luego ſe examinaràn las condiciones de la queſtion, atendiendo en quanto fuere poſsible a vſar de proporcionales, que es el modo mejor, y mas facil para hallar ſu reſolucion, para lo qual ſe harà comparacion de vnas lineas con otras, valiendoſe de los modos de arguir, que enſeña Euclides en el lib. 5. alternando, invertiendo, &c. haſta hallar vna igualacion, en que deſpejando vna magnitud incognita, ſe pueda exterminar de las otras igualaciones, ſubſtituyendo en ellas en lugar ſuyo ſu valor, eſto ſe continuarà, haſta que quedando vna ſola incognita igual à algunas cantidades conocidas, ſe aya hallado la ſolucion; con eſta ſe hara manifieſto el modo de conſtruir el Problema, y juntamente ſu demonſtracion; todo lo qual ſe podrà dàr en terminos Geometricos, oculcando, ſi pareciere, el artificio con que ſe hallò, que es lo que juzgan muchos hizieron los mas celebres Geometras de la antiguedad, para grangearſe mayores aplauſos con tan nobles invenciones.

Los principios de que ha de valerſe el Analyſta ſon los Theoremas de los Elementos de Euclides, y otros de la Geometria. Para la reſolucion de los Problemas lineares, baſtaràn los del lib. 1. 3. 5. y 6. para los planos ſeràn tambien

bien meneſter los del lib. 2. pero para los ſolidos, y ſurſolidos, à mas de los ſobredichos ſe neceſsitarà de muchas propoſiciones conicas; y del conocimiento, y formacion de otras lineas curvas, de que ſe tratarà en ſu lugar.

PROP. III. Problema.

Analyſi de los Problemas lineares.

EN los Problemas lineares, dadas algunas lineas ſe buſcan otras: *Linea dada, ò conocida*, es la que conſta de vna longitud determinada, y conocida; y por conſiguiente es la que ſe termina en puntos conocidos: *Linea incognita*, es aquella, cuya longitud ſe ignora; y por conſiguiente ſe termina en vn punto no conocido; y hallado eſte, queda conocida la linea.

En los Problemas lineares la magnitud que ſe buſca, ſiempre ſe podrà hallar por vna tercera, ò quarta proporcional; y algunas vezes ſin ellas, como ſe vè en las reſoluciones ſiguientes.

QUESTION I. fig. 5.

DAdo el ſemicirculo ABCD, y la cuerda BC, paralela al diametro, hallar en ella el punto E, por el qual, ſi ſe tira del punto A, la recta AEF, la parte AE, ſea igual à EC; y la parte EB, igual à la EF.

Aviendo tirado las BG, CH. perpendiculares al diametro AD, ſeràn las AG, DH. iguales entre sì; y ſe haràn las ſupoſiciones ſiguientes.

$$AD \frown a.$$
$$BC \frown b \frown GH.$$
$$AE \frown x \frown EC.$$

Con que AG, como tambien HD $\frown \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. y la BE, como tambien ſu igual GK $\frown b - x$. à quien ſi ſe añade la AG $\frown \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. reſultarà la AK $\frown b - x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. eſto es, AK $\frown \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - x$. Aſsimiſmo, ſi à la linea

linea GH $\propto b.$ se añade la DH $\propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$ resultarà la GD $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$ y porque el quadrado de BG, ù de su igual EK, es igual al rectangulo AGD, serà el quadrado de EK igual al producto de $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$ por $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$ serà, pues, EK quadr. $\propto \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb.$ multiplicando aora $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - x \propto$ AK. por sì mismo, serà AK. quadr. $\propto \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab - ax + \frac{1}{4}bb - bx + xx.$ siendo, pues, el triangulo AKE, rectangulo en K, seràn los sobredichos quadrados de AK, KE (47. 1. Eucl.) iguales al quadrado de AE: sumados, pues, entrambos, serà la suma $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}ab - ax - bx + xx \propto xx.$ y multiplicandolo por el denominador 2. y vsando juntamente de la Antithesi, serà $aa + ab \propto 2ax + 2bx.$ y partiendolo por $2a + 2b.$ serà el quociente $x \propto \frac{aa + ab}{2a + 2b}.$ y partiendo el numerador por el denominador, serà $x \propto \frac{1}{2}a.$ esto es AE, igual al semidiametro AI. y queda resuelto el Problema, cuya construccion, y demonstracion se podra disponer en terminos Geometricos, como se sigue.

CONSTRUCCION.

HAgase centro en A, y con el intervalo AI, que es radio del semicirculo, descrivase el arco IE, y el punto E, en que corta à la cuerda BC, serà el que se pide; de suerte, que tirando por èl la recta AEF, serà AE, igual à EC; y la EB, igual à EF.

Demonstr. Tirando el radio IC, serà paralelo à la AE, por ser los angulos A, I, iguales, à quienes miden los arcos iguales IE, CD; y siendo tambien iguales AE, AI, serà la figura AICE, vn Rhombo: luego la linea AE, serà igual à EC, tambien el valor del angulo A, (20.3. Eucl.) es la mitad

tad del arco FD, y ſiendo ſu valor EI, ò CD, ſerà CD, mitad de FD: luego FC, y CD, ſon iguales, y por conſiguiente ſon iguales FC, y AB; y añadiendoles el comun BF, ſeràn los arcos AF, BC, iguales; y por conſiguiente las cuerdas BC, AF, (27.3. Eucl.) ſon tambien iguales; luego quitando à la BC, la EC; y a la AF, la AE, que ſe han probado iguales, quedaràn la EB, EF, iguales.

QUESTION II. figur. 6.

Medir la altura inaceſsible AB, con vn eſpejo llano.

POngaſe orizontalmente vn eſpejo llano en el punto C; retireſe el que mide haſta que pueſto en D, y ſu viſta en E, deſcubra el remate A, por el angulo de reflexion ECD, igual al angulo de la incidencia ACB, como ſe demueſtra en la Catoptrica. Pongaſe deſpues el eſpejo en vn otro lugar F, que eſtè en el miſmo plano orizontal que el primero; y ambos en la miſma recta BG, y pueſto el Geometra en G, deſcubrirà ſu viſta H, la extremidad A, de la Torre por el angulo de reflexion HFG, que es igual al de la incidencia AFB: hecho eſto ſe darà nombre a las lineas como ſe ſigue.

$$CD \backsim a.$$
$$DE \backsim b \backsim GH.$$
$$CF \backsim c.$$
$$GF \backsim d.$$
$$AB \backsim x.$$

Los triangulos ABC, CDE, ſon equiangulos por ſer los angulos D, B, rectos; y los formados en C, iguales, por ſer de incidencia, y reflexion: luego ſerà b. a:: como x. con CB: luego por regla de tres, ſerà CB $\backsim \frac{ax}{b}$ y por conſiguiente ſerà BF $\backsim c + \frac{ax}{b}$ tambien en los triangulos ſemejantes ABF, FGH, es BF, à AB, como GF, a GH: eſto es, $c + \frac{ax}{b}$. x:: d. b. luego el producto de los eſtremos es igual al de los medios $bc + ax \backsim dx$. luego $bc \backsim dx - ax$. y partien-

tiendo por d — a, ſerà $x \backsim \frac{bc}{d--a}$. De que ſe infiere la ſiguiente Analogia, d — a. b::c.x. ſupueſto, que la ſegunda, y tercera multiplicadas, y partido ſu produćto por d — a. ſon iguales à la quarta x. con que ſe ha reſuelto el Problema, porque la Analogia GF — CD, DE :: CF, AB, nos dà à conocer, que para hallar la altura AB, ſe ha de hallar vna quarta proporcional à las tres magnitudes GF — CD, DE, CF.

Conſtruccion, y demonſtracion.

COrteſe la GO igual à DC, y halleſe vna quarta proporcional à las tres OF, GH :: CF, AB. La demonſtracion es clara, porque los triangulos ABC, GOH, ſon ſemejantes: luego ſerà OG, à CB, como GH, à AB; y ſiendo tambien ſemejantes los triangulos FAB, FGH, ſerà tambien FG, à FB, como GH, à AB: luego ſon proporcionales FG, à FB, como OG, à CB; y alternando ſerà FG, à OG, como FB, a CB; y dividiendo ſerà FO, à OG, como FC, à CB; y otra vez alternando ſerà FO, à FC, como OG, à CB; y ſiendo OG, à CB, como GH, à AB, ſerà FO; à FC, como GH, à AB, y alternando, como FO, à GH; aſsi FC, à AB, que es lo que ſe avia de demonſtrar.

QUESTION II. fig. 7.

Dada la recta AC, dividida de qualquiera ſuerte en B, dividirla otra vez con el punto O, entre B, y C, que ſean AO, OC, BO, proporcionales.

SEa AB $\backsim$ a. AC $\backsim$ b. BC $\backsim$ f. que ſon conocidas, y la incognita BO $\backsim$ x. y ſuponiendo como hecho lo que ſe pide, ſe ſupondràn ſer proporcionales AO, à OC; como OC, a BO, eſto es, a + x. f—x :: f—x. x. luego componiendo ſeràn proporcionales a + x + f — x. eſto es, a + f. f—x :: f.x. luego por la Prop. 12. 5. Eucl. la ſuma de los antecedentes a + 2f. tiene con la ſuma de los conſequentes f — x + x. que es f. la miſma razon que f. con x. y quedando la incognita x. ſola en el vltimo termino, queda reſuelto el Problema.

CONS-

CONSTRUCCION.

Añadaſe à la AC, en derechura la CQ, igual à BC, y hallese à las AQ, BC, vna tercera proporcional; y eſſa ſerà la BO, que ſe pide; y aſsi, digo, que ſeràn proporcionales AO, OC, BO.

Demonſtr. Por ſer AQ, BC, como BC, à BO, por conſtruccion, ſerà AQ, menos BC, a BC; como BC, menos BO, à BO; eſto es, como AC, a BC; aſsi OC, à BO; y alternando, como AC, à OC; aſsi BC, à BO: y dividiendo, como AC, menos OC, à OC; aſsi BC, menos BO, à BO; eſto es, como AO, a OC; aſsi OC, à BO, que es lo que ſe avia de demonſtrar.

El miſmo Problema ſe puede proponer en la forma ſiguiente: *Hallar tres rectas proporcionales tales, que la ſuma de la primera, y ſegunda ſea igual à la linea b. y la ſuma de la ſegunda, y tercera ſea igual à la linea f.* que ſe reſolvera en la forma dicha.

QUESTION IV. fig.7.

Dada la recta HN, dividida en los puntos L, M, de qualquiera manera, dividirla otra vez con vn punto O, entre L, M, de tal ſuerte, que ſean proporcionales HO, à OM, como ON, à LO.

Supongo ſea HL ∽ a. LM ∽ b. MN ∽ d. HN ∽ e. y la LO ∽ x. y ſuponiendo yà como hecho, y concedido lo que ſe pide, ſeràn proporcionales a + x. b − x :: b − x + d. x. luego componiendo, ſerà a + b. b − x :: b + d. x. y alternando ſeran proporcionales a + b. b + d :: b − x. x. donde yà ſe vè claramente, que para reſolverſe el Problema, ſe ha de dividir la LM, en O, en dos partes que tengan la miſma razon que HM, à LN.

Conſtruccion, y demonſtracion.

Dividaſe (10.6. Eucl.) la recta LM, en O, en dos ſegmentos proporcionales con HM, LN, de ſuerte, que ſean HM, a LN; como OM, à LO: y ſeràn proporcionales

les alternando HM, OM :: LN. LO. luego dividiendo, seràn proporcionales HO, à OM; como ON, à LO, que es lo que se pide.

El modo con que hemos resuelto estas dos vltimas questiones, consiste en vsar de los medios de arguir en los proporcionales, hasta llegar à excluir la magnitud incognita, ò ponerla en terminos, que puedan determinar su valor los proporcionales conocidos, que es substancialmente la methodo con que D. Antonio Hugo resuelve las sobredichas, y otras muchas questiones en su Analysi Geometrica, aunque la disposicion sea diferente. Siempre, pues, que el Problema fuere de proporcionales, ò se pudiere reducir à ellos, se podrà resolver con el mismo estilo, sin llegar à formar igualacion; pero si se quisiere observar el estilo ordinario, se harà la resolucion, como en la question segunda; y para que mas facilmente se comprehenda, resolvere segun este la misma question 4. que acabamos de resolver.

Hecho el plantèo de la question como antes en la fig. 7. se supone, son proporcionales $a + x . b - x :: b - x + d . x$. luego componiendo, lo seràn tambien $a + b . b - x :: b + d . x$. luego el producto de los extremos, serà igual al de los medios; esto es, $bb + bd - xb - xd$ ∽ $ax + bx$. y por antithesi $bb + bd$ ∽ $ax + xd + 2bx$. y partiendolo todo por $a + d + 2b$. serà $\frac{bb + bd}{a + d + 2b}$ ∽ x. luego por la razon dada en la question 2. son proporcionales $a + d + 2b . b + d :: b . x$. luego dividiendo serà $a + d + 2b - d - b$. con $b + d$ :: como $b - x$. con x. esto es, $a + b$. con $b + d$. como $b - x$. con x. que es lo que se hallò antes. Este serà el estilo que regularmente seguirèmos, por ser el que hasta aqui hemos guardado en las demas resoluciones.

Las questiones siguientes, y otras semejantes, se resuelven con suma facilidad por las reglas ordinarias, por proponerse en terminos numericos.

QUESTION V.

En vn triangulo rectangulo dada la diferencia de los lados que forman el angulo recto; y la suma del lado menor con la hypothenusa, hallar los tres lados.

EN vn triangulo rectangulo, los lados que forman el angulo recto se diferencian en 40. y la suma del lado menor, y la hypothenusa es 320. Pidese la magnitud de cada lado.

Supongo sea el lado menor z. el mayor serà $z + 40$. y la hypothenusa serà $320 - z$. siendo, pues, (47. 1. Eucl.) el quadrado de la hypothenusa igual à los quadrados de los lados, se formaràn dichos quadrados: el quadrado de z. es zz. el quadrado de $z + 40$. es $zz + 80z + 1600$. la suma de entrambos es $2zz + 80z + 1600$. igual al quadrado de la hypothenusa, que es $102400 - 640z + zz$. con que es la igualacion $2zz + 80z + 1600 \backsim 102400 - 640z + zz$. y por antithesi $zz + 720z \backsim 100800$. resuelta esta igualacion por las reglas ordinarias, se halla el lado menor $z \backsim 120$. el otro lado $z + 40 \backsim 160$. y la hypothenusa $320 - z \backsim 200$.

QUESTION VI. fig. 8.

En el triangulo MNO, el lado maximo MO, es 21. el lado MN, es 20. y al lado NO, es 13. pies: Pidese quantos tengan los segmentos MP, PO, que forma el perpendiculo.

LA incognita MP, sea y. y siendo toda la MO, 21. serà PO, $21 - y$. y por ser el quadrado de MN, igual à los quadrados de MP, PN; y el quadrado de NO, sea igual à los quadrados de NP, PO, si de 400. que es el quadrado de MN, se quita yy. quadrado de MP, la resta $400 - yy$. serà el quadrado del perpendiculo NP. Asimismo, si $441 - 42y + yy$. que es el quadrado de PO, se quitan de 169. que es el quadrado de NO, restaràn $42y - 272 - yy$. que es tambien el quadrado del perpendiculo NP, luego tengo esta igualacion $400 - yy \backsim 42y - 272 - yy$. y por antithe-

titheſi ſerà 672 ∝ 42y. luego 16 ∝ y. con que es el ſegmento mayor MP, 16. y el menor PO, que era 21 — y. ſerà 5. y ſe ha conocido tambien el perpendiculo NP, 12.

QUESTION VII.

En vn triangulo rectangulo la hypothenuſa tiene 52. palmos; y los lados tienen la razon de 5. con 12. Pideſe de quantos palmos ſea cada lado.

EL lado menor ſea 5t. y el mayor 12t. ſus quadrados ſon 25tt. 144tt. ſumados ſon 169tt. iguales al quadrado de la hypothenuſa; luego 169tt ∝ 2704. y partiendo por 166. es el quociente 16 ∝ tt. luego 4 ∝ t. con que el lado menor 5t ∝ 20. y el mayor 12t ∝ 48. la prueba es, que los quadrados 400. 2304. de los lados ſon iguales à 2704. quadrado de la hypothenuſa.

QUESTION VIII. fig. 9.

El lado AC, del triangulo rectangulo ABC, es de 15. pies, la ſuma de los otros dos es 75. pies; pideſe quantos tengan los lados CB, AB.

SEa BC ∝ y. y ſerà AB ∝ 75 — y. el quadrado de AB, es 5625 — 150y + yy. el quadrado de AC, es 225. la ſuma de entrambos es 5850 — 150y + yy. el quadrado de la hypothenuſa BC, es yy. luego tengo la igualacion yy ∝ 5850 — 150y + yy. y por Antitheſi es 150y ∝ 5850. y partiendo por 150: es y ∝ 39. con que la hypothenuſa BC, es 39. luego el lado AB ∝ 75 — y ∝ 36. pies.

QUESTION IX.

Al lado mayor de vn paralelogramo rectangulo le faltan tres palmos para ſer doblado del menor: la area es 209. palmos quadrados, pideſe la cantidad de de cada lado.

SEa el lado menor v. el mayor ſerà 2v — 3. el producto de entrambos es 2vv — 3v ∝ 209. luego vv—

$-\frac{3}{2}v \propto 104\frac{1}{2}$. resuelta esta igualacion por las reglas generales, se halla el lado menor $v \propto 11$. y el mayor $2v - 3 \propto 19$.

QUESTION X.

Dada la area de vn paralelogramo rectangulo, y la razon de sus lados, hallar los lados.

AY vn Huerto, cuya area es 588. varas quadradas; la longitud à la latitud es como 4. à 3. pidese, quanta sea la longitud, y la latitud. Sea el lado mayor $4x$. y el menor $5x$. multiplicados entre sì dàn el producto, ò area $12xx \propto 588$. luego $xx \propto 49$. luego $x \propto 7$. es, pues, el lado mayor 28. y el menor 21. que multiplicados dàn la area 588.

QUESTION XI.

En vn paralelogramo rectangulo, la suma de los quadrados de los lados, que forman el angulo recto, es 1250. palmos; el producto de los mismos lados es 527. palmos: pidese la magnitud de cada lado.

SUpongo, que vn lado sea x. y el otro y. su producto serà $xy \propto 527$. y partiendolo todo por y. para que se desaparezca la x. serà $x \propto \frac{527}{y}$. y substituyendo este valor en lugar de x. seràn los dos numeros, el vno y. y el otro $\frac{527}{y}$ sus quadrados son yy. $\frac{277729}{yy}$. cuya suma, segun la propuesta es 1250. luego tengo la igualacion, que quitado el quebrado es $277729 \propto 1250yy - y4$. y dispuestos sus terminos, para resolverla segun nuestras reglas es $y4. * - 1250yy. * + 277729 \propto 0$. y hecha su resolucion se hallarà $y \propto 17$. y partiendo 527. por 17. serà $x \propto 31$. son, pues, los lados que se piden 17.31.

QUES-

QUESTION XII.

Un paralelepipedo tiene 3375. palmos de area, y su altura, longitud de su basa, y latitud de la misma, tienen razon sesquialtera: pidense sus determinadas dimensiones.

PAra evitar quebrados: Sea la altura 9y. la longitud 6y. y la latitud 4y. multiplicando la longitud por la latitud, resulta la basa 24yy. multiplicando esta basa por la altura, sale la area del paralelepipedo 216y3. ∽ 3375. partiendo por 216. es el quociente y3. ∽ 15 $\frac{135}{216}$. cuya raiz cubica es 2 $\frac{1}{2}$. es, pues, y ∽ 2 $\frac{1}{2}$ luego 9y ∽ 22 $\frac{1}{2}$. que es la altura; 6y ∽ 14. longitud de la basa 4y ∽ 10. su latitud.

QUESTION XIII.

La area de vn paralelepipedo rectangulo es 1468. los lados de la basa tienen razon sesquialtera; y la altura es tripla del lado mayor: pidese la cantidad de los lados de la basa, y de la altura.

LOs lados de la basa sean el mayor 3v. y el menor 2v. y la altura será 9v. multiplicando los lados de la basa, se halla ser la basa 6vv. que multiplicada por la altura, dá la solidèz del paralelepipedo 54v3. ∽ 1458. y partiendo por 54. sale v3 ∽ 27. y sacando la raiz cubica, es v ∽ 3. luego el lado mayor es 3v ∽ 9. el lado menor 2v ∽ 6. y la altura 9v ∽ 27.

QUESTION XIV. fig. 10.

La recta DB, perpendicular al diametro AC, consta de 8. pies; y el diametro de 20. pidese de quantos consten los segmentos AB, BC.

COmo la DB, sea media proporcional entre los segmentos AB, BC, (*corol. de la Prop.* 13.6. *Eucl.*) será

el producto de eſtos igual al quadrado de DB, [Eucl. 17.6.] que es 64. conſiſte, pues, la reſolucion del Problema en dividir el diametro AC, ò el numero 20. en dos partes, que multiplicadas hagan 64. Sea, pues, la menor x. la mayor 20 — x. multiplicando la vna por la otra, ſale el producto 20x — xx ∽ 64. reſuelta eſta igualacion ſegun el eſtilo ordinario, dà x ∽ 4. ſegmento menor BC, y ſerà 20 — x ∽ 16. ſegmento mayor AB: de eſta manera ſe reſolveràn innumerables queſtiones ſemejantes.

QUESTION XV. fig. 11.

Hallar dentro del angulo dado ABC, el punto E, por el qual, y por los puntos A, D, dados en la linea AB, tirando las rectas AEF, DEC, quede cortada la recta CB, en dos ſegmentos FB, FC, iguales.

SUponiendo la queſtion como reſuelta, ſe tirarà la EH, paralela à AB; y la EG, paralela à BC, y ſe harà la ſupoſicion ſiguiente.

AB ∽ a.
DB ∽ b.
BG ∽ x ∽ EH.
EG ∽ y ∽ HB.

De lo dicho ſe ſigue ſer AG ∽ a — x. y ſi ſe toma la AI, igual à AB, aſsi como CF, ſe ſupone igual a FB, tirada la IC, ſeràn AF, IC, paralelas. Eſto ſupueſto, en los triangulos ſemejantes AGE, ABF, ſon proporcionales a—x, a::y, BF, luego BF $\backsim \frac{ay}{a-x} \backsim$ CF, luego BC $\backsim$ $\frac{2ay}{a-x}$. y quitando de aqui la BH ∽ y. ſe tendrà CH $\backsim$ $\frac{2ay}{a-x} - y$. que reduciendolo todo à quebrado, multiplicandola y. por el denominador, ſerà CH $\backsim \frac{ay + xy}{a-x}$. Tambien en los triangulos ſemejantes CHE, CBD, ſon proporcionales CD, à CE, como DB, à EH, y ſiendo DI, à AI, ò AB, como CD, à CE, ſeràn proporcionales DI, à AB,

AB, como CD, à CE; y tambien DI, à AB; como DB, à EH; y alternando, como DI, à DB, asſi AB, à EH; eſto es, como 2a—b. con b:: asſi a. con x. luego $x \frown \frac{ab}{2a-b}$ Queda, pues, determinada la x. y por conſiguiente el punto G, por quien ſe ha de tirar la paralela GL; pero por quedar la y. indeterminada, no es determinada la diſtancia; y asſi, qualquiera punto, que ſe ſeñale en la paralela GL, reſolverà la queſtion; y ſerà la conſtruccion como ſe ſigue.

CONSTRUCCION.

AViendo alargado el lado AB, haſta I. de ſuerte, que AI, ſea igual à AB; halleſe vna quarta proporcional à las tres lineas DI, BD, AB, que ſerà BG; por el punto G, ſe tirarà la GL, paralela à BC, y qualquiera punto, tomado à diſcrecion en la GL, como por exemplo E, ſerà tal, que tirando por el, deſde los puntos dados A, D, las rectas AEF, DEC, ſerà la BF, igual à CF.

Demonſtr. Tirada la recta CI, y por el punto E, la EH, paralela à AB, ſe conſiderarà, que ſupueſto que por la conſtruccion ſon proporcionales DI, DB:: AB, BG, ſi en lugar de los vltimos terminos AB, BG, ò AB, HE, ſe ſubſtituyen los dos BF, HF, que tienen la miſma razon por la ſimilitud de los triangulos ABF, EHF, reſultarà eſta nueva Analogia DI, DB:: BF, HF: luego componiendo, ſerà BI, DB:: BF + HF, HF.

Eſto ſupueſto, en los triangulos ſemejantes ABF, EHF, ſon proporcionales AB, EH; o AI, BG:: BF, HF, luego componiendo, ſerà AI + BG, BG:: BF + HF, HF. y ſi en lugar de los dos vltimos terminos BF + HF, HF, ſe ſubſtituyen los dos, BI, BD, que como antes vimos, tienen la miſma razon, ſeràn proporcionales AI + BG, BG:: BI, BD, y permutando AI + BG, BI:: BG, BD. y dividiendo ſerà AG; BI:: GD, BD; y ſi en lugar de eſtos dos vltimos terminos GD, BD, ſe ponen los dos GE, BC, que tienen la miſma razon, por la ſimilitud de los triangulos EGD, CBD, ſeràn proporcionales AG, BI:: GE, BC: lo que manifieſta ſer ſemejantes los dos triangulos EGA, CBI; y por conſiguiente

la recta AF, es paralela à la CI; y los triangulos FBA, CBI, son semejantes; luego siendo por construccion la AB, igual à la AI, serà tambien la BF, igual à la FC, que es lo que se avia de demonstrar.

PROP. IV. Problema.

Analysi de los Problemas planos.

QUESTION XVI. fig. 12.

Dado el semicirculo ABC, y la BD, perpendicular al diametro; tirar de la extremidad A, del diametro la cuerda AE; de suerte, que la parte EF, comprehendida entre la circunferencia, y dicha perpendicular, sea igual à la linea dada AO.

AViendo tirado del punto E, la EK, perpendicular al diametro, y las cuerdas AB, CE, BC, se supondrà.

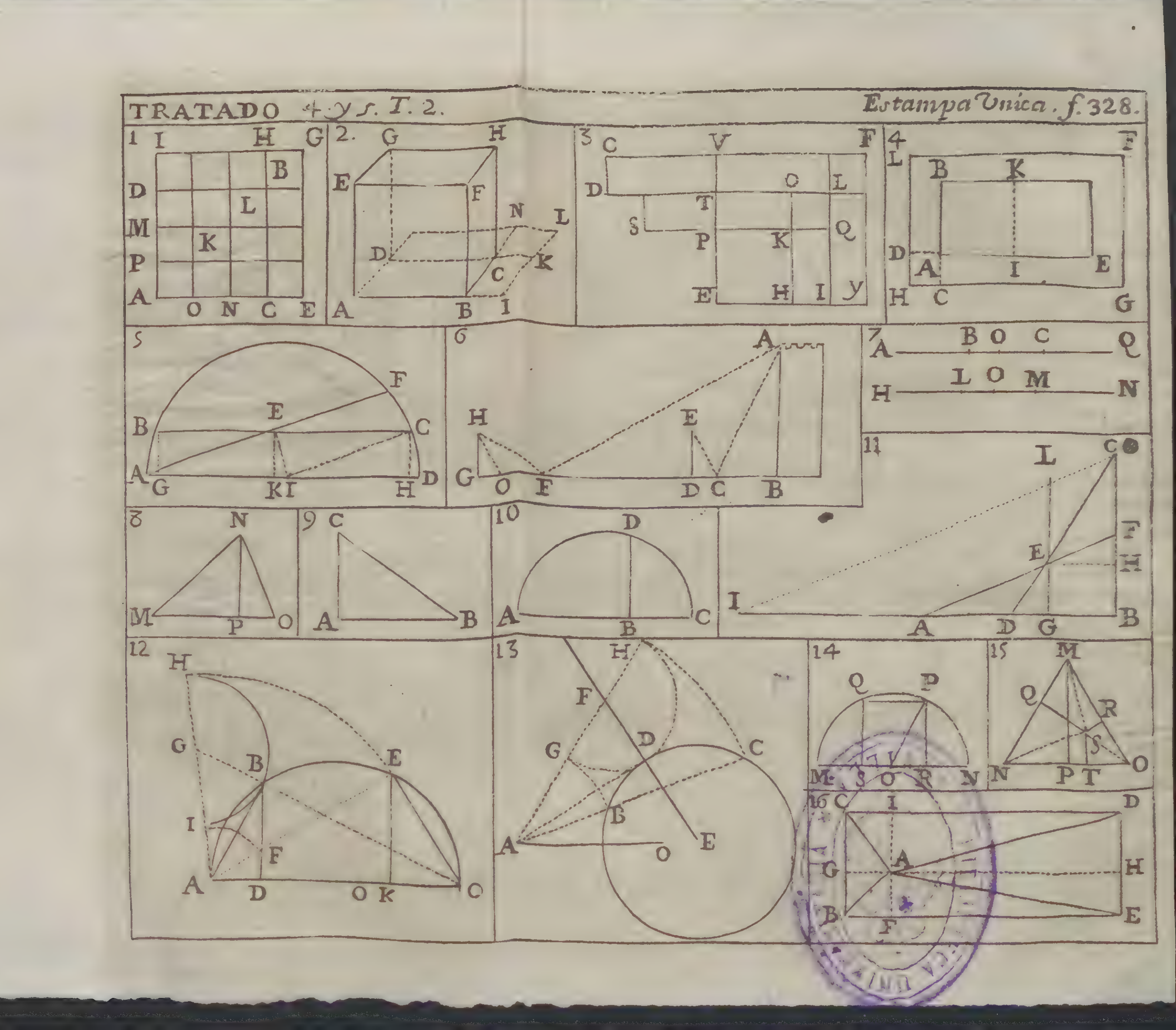
$AO \propto a \propto FE.$

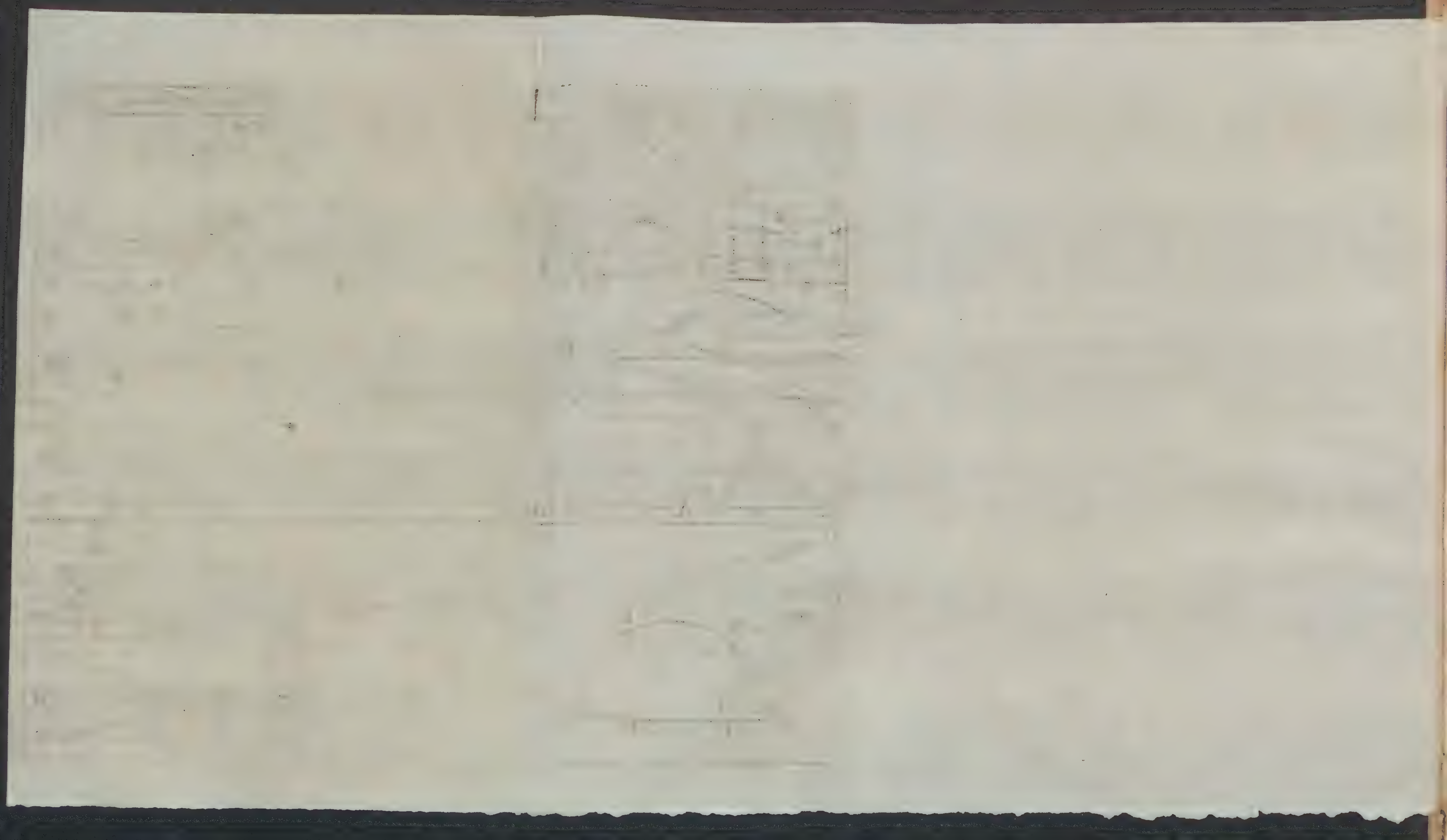
$AD \propto b.$

$AC \propto d.$

$AF \propto x.$

De que se infiere ser $AE \propto x + a$. y siendo los triangulos ABC, ABD, semejantes, son proporcionales AC, AB, AD; esto es, d. AB, b. luego $AB \propto \sqrt{.}\, bd$. tambien en los triangulos semejantes ADF, AKE, son proporcionales AF, AD :: AE, AK. esto es, x. b :: x + a. AK: luego $AK \propto \frac{xb + ab}{x}$. assimismo en los triangulos semejantes AEC, AEK, son proporcionales AC, AE :: AE, AK; esto es, d. x + a :: x + a. AK; con que $AK \propto \frac{xx + 2ax + aa}{d}$. y comparando los dos valores hallados de AK, serà $\frac{xx + 2ax + aa}{d} \propto \frac{bx + ab}{x}$. y quitados los quebrados, serà $x^3 + 2axx + aax - bdx - abd \propto o$. y partiendo esta igualacion por $x + a$. se tendrà esta otra igualacion $xx + ax - bd \propto o$. la qual tiene dos raizes vna positiva, que es x. y otra negati-


1
2.
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16



gativa, que es x + a. cuya ſuma es 2x + a. y la ſemiſuma es $x + \frac{1}{2}a$. quedarà, pues, reſuelta la queſtion, formando vna linea compueſta de la incognita z. y de $\frac{1}{2}$ a. lo que ſe conſeguirà haziendo vn triangulo rectangulo, que tenga por vn lado la AB ∽ V. bd: ∽ V. (xx + xa.) y por otro lado $\frac{1}{2}$ a. porque con eſto ſerà la ſuma de eſtos dos quadrados $xx + xa + \frac{1}{4}$ a. igual al quadrado de la hypothenuſa; cuya raiz $x + \frac{1}{2}$ a. ſerà la hypothenuſa, ò linea que ſe deſea.

CONSTRUCCION.

PRolongueſe la linea CB, haſta que la BG, ſea igual à la mitad de la linea dada AO, por el punto G, tireſe a recta AH, larga à diſcrecion: del punto G, con el radio GB; hagaſe el arco HBI, que cortarà à la AH, en los dos untos I,H, que determinan las dos raizes de la igualacion x + 2x − bd ∽ o. la x. es igual à la AI; y deſcriviendo con lla el arco IF, queda determinado el punto F; de ſuerte, ue tirando por F, la AE, ſerà la FE, igual à la dada AO; a otra raiz es AH, ò la x + a. y peſcriviendo deſde A, el rco HE, darà en la periferia el punto E, y tirando la AE, erà la FE, como antes igual à AO.

Demonſtr. En el quadrilatero DFEC, los angulos opueſos D, E, ſon rectos; luego (22. 3. Eucl.) ſe puede ſuponer nſcripto en vn circulo: luego (36. 3. Eucl.) el rectangulo AF, ſerà igual rectangulo CAD, ò al quadrado de AB, gual à qualquiera de ellos; y ſiendo la AB, tangente del irculo HBI, (16.3. Eucl.) ſerà ſu quadrado igual al rectanulo HAI, (36.3. Eucl.) luego el rectangulo EAF, es igual l rectangulo HAI; y ſiendo por conſtruccion AF, igual à AI, ſera EA, igual à HA; y por conſiguiente EF, à HI, ò AO, que es lo que aqui ſe avia de demonſtrar.

ESCHOLIO.

HEmos vſado de la linea AH, que como dixe, es la raiz negativa, como ſi fueſſe poſitiva, por permitirlo aſsi el Problema; mas podiamos vſar de ella como negativa, perficionando la circunferencia AEC, y prolongando la perpendicular BD, àzia baxo; y juntamente continuando la periferia HE, con que cortaria à la del circulo en otro punto, à quien tirando deſde A, vna recta, el ſegmento comprehendido entre la perpendicular BD, prolongada, y la periferia ſeria tambien igual à la dada AO. La reſolucion de eſte Problema, es de Ozanam en ſu Diccionario, ò idèa general de las Mathematicas, fol. 71.

QUESTION XVII. fig. 13.

Del punto A, dado fuera del circulo BDC, cuyo centro es E, tirar vna recta AC, de ſuerte, que la cuerda BC, ſea igual à vna recta dada AO.

TIrada del punto A, dado, la tangente AD, ſe ſupondrà.

$$AO \backsim a \backsim BC.$$
$$AD \backsim b.$$
$$AC \backsim x.$$

Y por conſiguiente ſerà $AB \backsim x - a$. y ſiendo (36. 3. Eucl.) el rectangulo CAB, igual al quadrado AD, ſe tendrà la igualacion ſiguiente: $xx - ax \backsim bb$. de que ſe infiere la ſiguiente conſtruccion, como en la queſtion antecedente.

CONSTRUCCION.

DEL punto dado A, tireſe la tangente AD; y del centro E, por el punto D, del contacto, la recta EDF; de ſuerte, que DF, ſea igual à la mitad de la linea dada AO. Deſcrivaſe del centro F. por el punto D, vna circunferencia de circulo GDH, que cortarà à la recta AF, en los puntos G, H, con lo qual quedaràn determinadas las AH, AG, y qualquiera de ellas reſolverà la queſtion; tireſe, pues, con la diſtancia AH, el arco HC, que cortarà la periferia de el circulo dado en C, tireſe la recta AC, y la

cuer-

cuerda BC, ſerà igual à la linea dada AO.

Demonſtr. Por ſer la AD, tangente del circulo BDC, es (36. 3. Eucl.) el rectangulo CAB, igual al quadrado de AD; y ſiendo la miſma AD, tangente del circulo GDH, ſerà el rectangulo HAG, igual al quadrado de AD; luego los rectangulos CAB, HAG, ſon iguales, y ſiendo ſus alturas AC, AH, iguales, lo ſeràn tambien ſus baſas AB, AG, que quitadas de las AC, AH, ſeràn los reſiduos GH, BC, iguales; y ſiendo GH, por conſtruccion igual à AO, ò dupla de FD, mitad de AO, ſerà BC, igual à AO.

La otra linea AG, tambien dà el punto B, deſcriviendo con ella al arco GB, por quien tirada la ABC, ſe conſeguirà lo miſmo.

QUESTION XVIII. fig. 14.

En vn ſemicirculo dado inſcrivir vn quadrado.

SUpongaſe yà inſcrito el quadrado SQPR, en el ſemicirculo MQN, y del centro O, tireſe el radio OP; y ſupongaſe OP ∽ a. OR ∽ x. Siendo, pues, la SQ, RP, iguales, por ſer lados del quadrado, diſtaràn igualmente del centro O, [14. 3. Eucl.] luego las OR, OS, ſon iguales, luego la OR, es mitad de la RP, ſiendo, pues, OR ∽ x. ſerà RP ∽ 2x. y por la 47. 1. Eucl. ſerà xx + 4xx. eſto es, 5xx ∽ aa. de que ſe infiere la ſiguiente.

CONSTRUCCION.

COmo el quadrado de OP, ù de ON, ſea quintuplo del quadrado de OR, hallando vna media proporcional entre ON, y la quinta parte de la miſma ON, eſſa ſerà la OR, y cortando ſu igual OS, ſe levantaràn las perpendiculares SQ, RP, y juntando la QP, digo, quedarà formado el quadrado.

Demonſtr. El quadrado de OR, por conſtruccion, es igual al rectangulo de ON, y de ſu quinta parte: luego cinco quadrados de OR, ſon iguales à cinco de los ſobredichos rectangulos, que hazen juntamente el quadrado de ON, ò OP; ſiendo, pues, el quadrado de OP, igual à cinco quadrados de OR; y el miſmo quadrado de OP, ſiendo

do (47. 1. Eucl.) igual al quadrado de OR, y al quadrado de RP, seràn estos dos quadrados iguales à cinco quadrados de OR; luego el quadrado de RP, es quadruplo del quadrado de OR; luego su lado RP, es duplo de OR, luego es igual à SR, como tambien SQ; luego SPQR, es quadrado.

PROP. V. Problema.

Analysi de los Problemas indeterminados, ò locales.

P*Roblema indeterminado, ò local*, es el que admite infinitas soluciones diferentes; de suerte, que el punto que puede resolver el Problema Geometrico, se puede indiferentemente escoger dentro de vna cierta extension, ò magnitud, llamada *lugar Geometrico*, por quanto qualquiera de sus infinitos puntos puede resolver el Problema. Llamase *Problema local*, por determinar solamente el lugar dentro de cuyos terminos se contienen las infinitas respuestas; como se viò en la question 15. cuya Analysi solo determinò la paralela GL, por lugar Geometrico; sin poder determinar en ella vn punto mas que otro para la solucion; y assi, qualquiera de ellos la puede dàr indiferentemente.

El Problema *indeterminado, ò local*, puede tambien ser *simple, plano, solido, ù sursolido*. Quando el punto que puedo resolverle està en vna linea recta, el Problema serà *simple, ò linear*: quando en la circunferencia de vn circulo, serà el Problema *plano*: quando en la circunferencia de vna seccion conica distincta del circulo, serà *solido*: y quando està en otra linea curva de genero mas elevado que las conicas, serà *Problema sursolido*.

Problema Theorematico, es aquel que aunque en el modo de proponerse parezca Problema, pero en realidad es Theorema, como lo es el siguiente: *Dividir vna linea dada, y terminada en vn punto, de tal suerte, que los quadrados de entrambos segmentos, y dos rectangulos de los mismos, sean iguales al quadrado de toda la linea.* El qual evidentemente es Theorema, y es el 4. del lib. 2. de Eucl. de suerte, que en qualquiera punto de la linea sucede lo mismo.

El modo de conocer por las mismas igualaciones quan-

quando el Problema es indeterminado, ò local; y de què especie sea de las sobredichas, es el siguiente: siempre que aviendo seguido todas las condiciones de vna question, y aver resuelto todas sus igualaciones para exterminar las incognitas, quedaren alguna, ò algunas sin poderse excluir, serà la question *indeterminada*, ò *local*; si la incognita que no se puede exterminar, fuere vna, serà el Problema *linear*; si fueren dos, serà *plano*, y si tres, *solido*: y si los terminos que ay en vn miembro de la equacion fueren los mismos que los de el otro, serà Theorema lo que se propuso como Problema. Todo lo dicho se vè en las questiones siguientes.

QUESTION XIX. fig. 15.

Dentro el triangulo equilatero MNO, señalar vn punto S, tal, que los perpendiculares de dicho punto à los lados juntas, sean iguales al perpendiculo MP.

SUpongase el Problema resuelto, y sea el punto S, el que se pide; y tiradas las perpendiculares ST, SR, SQ; y las SO, SM, SN, y el perpendiculo MP, supongase.

PO ∝ a.
MP ∝ b.
ST ∝ x.
SR ∝ y.
SQ ∝ z.

Siendo, como se supone, el triangulo dado equilatero, los triangulos NSO, OSM, MSN, tendràn iguales basas: luego [41. 1. Eucl.] serà NSO ∝ ax. OSM ∝ ay. MSN ∝ az. y el triangulo NMO ∝ ab. y tendràn los parciales con el total la razon de sus alturas [corol. 1. 6. Eucl.] serà, pues, su proporcion, como se sigue.

x. b. :: ax. ab.
y. b. :: ay. ab.
z. b. :: az. ab.

Luego x + y + z. b. :: ax + ay + az. ab. luego el producto

ducto de los extremos; harà con el de los medios la siguiente igualacion, abx + aby + abz ∽ abx + aby + abz. y siendo vnos mismos los terminos de vna, y otra parte de la igualacion, se haze evidente, que el Problema propuesto es Theorema, que se propondrà en la forma siguiente.

THEOREMA.

Si de qualquiera punto, puesto dentro de vn triangulo equilatero, se tiran perpendiculares à los lados, seràn todas juntas iguales al perpendiculo de dicho triangulo. fig. 15.

Dentro del triangulo equilatero tomese qualquiera punto S. y desde dicho punto à los lados tirense las perpendiculares SR, ST, SQ: Digo, que las tres juntas son iguales al perpendiculo MP.

Demonstr. Los triangulos parciales NSO, OSM, MSN, tienen sus basas iguales à la del triangulo NMO, luego los tres tendràn con èl total NMO, la misma razon que sus alturas [1.6. Eucl.] y por consiguiente las alturas ST, SR, SQ, tendràn con la altura MP, la misma razon que tienen los tres triangulos NSO, OSM, MSN, con el triangulo NMO; y siendo aquellos tres juntos iguales al triangulo NMO, seràn sus tres alturas, ò perpendiculos iguales à la altura, ò perpendiculo MP.

QUESTION XX. fig. 16.

Dentro de vn paralelogramo rectangulo dado BCDE, hallar vn punto A, de quien tirando à los quatro angulos las rectas AB, AC, AD, AE, la suma de los dos quadrados opuestos AB, AD, sea igual à la suma de los otros dos quadrados opuestos AC, AE.

Dando por resuelto el Problema con el punto A, y aviendo tirado por dicho punto la GH, paralela al lado BE, y la recta IF, paralela à BC, se supondrà.

BE

$BE \backsim a \backsim CD \backsim GH.$
$BC \backsim b \backsim ED \backsim FI.$
$BF \backsim x \backsim GA \backsim CI.$
$AF \backsim y \backsim BG \backsim EH.$

Con esto se hallaràn,

$AH \backsim a - x \backsim EF \backsim DI.$
$CG \backsim b - y \backsim AI \backsim DH.$
AB quadr. $\backsim xx + yy.$
AC quadr. $\backsim xx + yy - 2by + bb.$
AD quadr. $\backsim aa - 2ax + xx + yy - 2by - bb.$
AE quadr. $\backsim aa - 2ax + xx + yy.$

Y porque la suma de los dos quadrados AB, AD, ha de ser igual à la de los dos AC, AE, se tendrà esta igualacion $aa - 2ax + 2xx + 2yy - 2by + bb \backsim aa - 2ax + 2xx + 2yy - 2by + bb.$ de que se colige ser la propuesta vn Theorema, que se propondrà como se sigue.

THEOREMA.

Si de qualquiera punto, puesto dentro de vn paralelogramo rectangulo, se tiran rectas à los angulos la suma de los dos quadrados opuestos AB, AD, serà igual à la suma de los otros dos opuestos AC, AE. fig. 16.

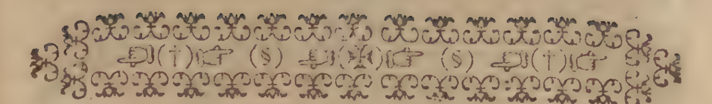
D*Emonstr.* El quadrado de CG, y el de DH, son iguales; y añadiendo à entrambos el quadrado de AH, sera CG, quadr. + AH, quadr. $\backsim$ DH, quadr. + AH, quad. y siendo (47.1.Eucl.) DH quad. + AH quadr. $\backsim$ AD quad. serà CG quadr. + AH quadr. $\backsim$ AD quadr. y añadiendo à entrambas partes el quadrado de AG, ù de BF, su igual, serà CG quadr. + AH quadr. + AG quadr. $\backsim$ AD quadr. + BF quadr. y por ser CG quadr. + AG quadr. $\backsim$ AC quadr. serà AH quadr. + AC quadr. $\backsim$ AD quadr. + BF quadr. Ultimamente, si se añade a entrambas partes HE quad. ò su igual AF quadr. se tendrà AH quadr. + AC quadr. + HE quadr. $\backsim$ AD quadr. + BF quadr. + AF quadr. y por ser AH quadr. + HE quadr. $\backsim$ AE quadr. y assimismo

FB

BF quadr. + AF quadr. ∽ AB quadr. ſerà AC quadr. AE quadr. ∽ AB quadr. + AD quadr. que es lo que ſe avia de demonſtrar.

Eſta es materia que requiere eſpecial Tratado ; pero juzgo ſer baſtante lo dicho para que ſe vea el vſo de la Algebra, en la reſolucion de los Problemas Geometricos.





TRATADO VI.

DE LA

MUSICA

ESPECULATIVA, Y Practica.

INTRODUCCION.



NENSE en la Musica la Philosophia natural, y Mathematica, para dar juntamente vn empleo gustoso al entendimiento, y vn delicioso recreo al sentido: ella es la que reduciendo à concordia encontradas, y diferentes vozes, eslavona vna cadena, que aprisiona con suavidad los afectos; y con la mixtura gustosa de sus consonancias buelve sabroso lo insipido, y lo amargo apetecible, como dixo el Poeta:

Musica turbatas animas, ægrumque dolorem
Sola levat, meritò Divumque, hominumque voluptas;
Qua sine nil iucundum animis, nec amabile quicquam.

Y si tan amable es la Musica por sus operaciones practicas, quanto mas lo serà por sus verdades especulativas? Mucho credito perdiò entre los doctos Themistocles (como afirma Tulio) por averse confessado totalmente ignorante de esta Arte., cuyo aprecio, y estimacion tuvo siempre elevado lugar entre Philosophos, Militares, y Principes.

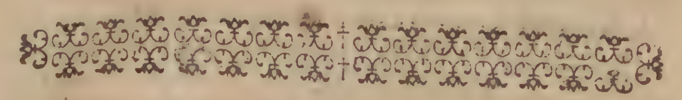
Resumirè, pues, en este breve Tratado, tanto la Musica practica, como la especulativa. Procurarè reducir sus Theoremas, y Problemas, no solo à principios Mathematicos, sì tambien à los Physicos, señalando la razon natural de las consonancias, y disonancias, y de otros muchos secretos de la naturaleza, à que abre passo esta ciencia nobilissima.

Es la Musica vna *Ciencia Physico-Mathematica, que trata de los sones harmonicos.* Llamase *Physico-Mathematica*, por participar su objeto la razon de sensible, propria del Physico; y la razon de quantidad, propria del Mathematico. Con dezir, que trata *de los sones harmonicos*, se manifesta el objeto material, y sugeto, ò materia de su empleo. Ay son *harmonico*; y son que *no es harmonico*: aquel es el que por sì es agradable al oìdo, como la voz del que canta, el sonido del Clarin, Organo, &c. El *no harmonico*, es el que por sì es desapacible al oìdo, como el trueno, y otros semejantes: Trata, pues, la Musica del son harmonico, y este es su material objeto.

El objeto formal de la Musica, es la proporcion de los sones harmonicos, la razon es, porque todo su empleo es demonstrar las consonancias, y disonancias que se pueden hallar entre dichos sones, las quales consisten en la razon, y proporcion que ellos tienen: Estas son el fin, y la razon formal de ocuparse en su especulacion; y à estas atiende la direccion de sus reglas: Y porque estas proporciones de los sones, en que consisten las consonancias, y disonancias, se explican con numeros, por esso es el comun sentir, que el objeto formal de la Musica es el *numero sonoro*, esto es, el numero que explica la harmonìa, y proporcion de los sones.

Di-

Dividese la Musica en *Practica, y Especulativa*: La *Practica*, es la que mediantes sus reglas, no solo enseña à cantar, sì que dirige; y ordena los sones harmonicos, de suerte, que mezclando lo grave, con lo agudo; lo blando, con lo fuerte; y lo acorde, con lo discorde, compone con soberano artificio las melodìas que oimos: La *especulativa*, es la que se ocupa en la averiguacion curiosa de las causas; y propriedades de los sones; y considera la naturaleza, y perfeccion de las consonancias, y disonancias, y sus admirables efectos.



LIBRO I.

DE LOS INTERVALOS MUsicos, tanto consonos, como disonos.

CONsiste la Musica en el conocimiento cientifico de los intervalos de las vozes, que llamamos *consonancias*, y *disonancias*; y assi este primer libro se empleará en su declaracion, explicando la proporcion, y naturaleza de las vozes que les forman, tanto segun principios Physicos, como Mathematicos.

DEFINICIONES COMUNES.

1. *SOnido, es una qualidad, que mueve, è inmuta el sentido del oido.* En que consista se explicara despues.

2. *Cuerpo sonoro, es el que tiene aptitud para producir el sonido,* como la Campana, el Clarin, &c.

3. *Sonido grave, es el que llamamos baxo, que con menos ar-*

dor

dor hiere al sentido. Sonido agudo, es el que llamamos alto, que con mayor viveza, y ardor inmuta el oìdo.

4. *Intervalo es la distancia, ò diferencia de dos vozes, vna grave, y otra aguda.*

5. *Consonancia, es la mixtura, ò agregado de dos vozes, agradable al sentido.*

6. *Disonancia, es la mixtura, ò agregado de dos vozes desagradable al sonido.*

Esto solo pretendo sirva de explicacion de los sobredichos terminos, y vozes, porque la naturaleza del significado luego se explicarà.

CAPITULO I.

DE LA NATURALEZA DEL SONIDO, y sus diferiencias.

NO ay duda, que el dàr la razon de las consonancias, y disonancias, pende de la noticia philosophica de la naturaleza, y formacion del sonido; materia, que aunque propria de la Philosophia, pero muy necessaria para la inteligencia de lo que hemos de tratar: reducirè, pues, à las Proposiciones siguientes, lo que juzgarè mas preciso para el assumpto.

PROP. I. Theorema.

Todo cuerpo sonoro es tremulo.

LLamase *Cuerpo tremulo*, el que herido se mueve con diferentes vaybenes, ò vibraciones: Digo, pues, que los cuerpos sonoros son tremulos. Pruebalo la experiencia. 1. Una campana herida tiembla con las dichas vibraciones, y tanto dura su sonido, quanto duran las vibraciones; y apenas le aplicamos vn paño que las impida, luego cessa su sonido. Lo mismo experimentamos en las cuerdas tensas de vna Harpa, ò Vihuela, que mientras tiem-

tiemblan se percibe su son ; y aplicandoles la mano, cessa el dicho movimiento, juntamente con el sonido : Tambien si quando cantamos aplicamos la mano à la garganta, percibimos el temblor de la aspera arteria, que forma la voz.

2. Tomese vn vaso de vidro al modo de copa, ò caliz, como A, (fig. 1.) echese dentro alguna cantidad de agua: si mojando el dedo le llevamos continuamente por sobre el labio del vaso, oirèmos, que forma vn muy agradable sonido ; pero este no se percibirà hasta que tanto el vaso, como la agua tiemblen ; lo qual es de tal manera, que la agua con su temblor salta sobre el vaso, resuelta en gotillas muy menudas. De esta, y otras experiencias se convence claramente, que los cuerpos sonores son tremulos ; y en tanto producen el sòn, en quanto se mueven con el temblor sobredicho.

PROP. II. Theorema.

Todo cuerpo tremulo mueve al ayre con semejante temblor.

LA razon es clara, porque qualquiera cuerpo movido, es fuerça que divida, è impela al ayre, por estarle este contiguo : luego le moverà con el mismo movimiento: luego el cuerpo que herido tiembla, y haze vibraciones, como la campana, y la cuerda, haze que el ayre tiemble con semejantes vibraciones.

Este movimiento tremulo del ayre, llega solamente hasta determinada distancia mayor, ò menor, segun fuere la magnitud, y fuerça del cuerpo tremulo que le impele. Precindo aora, si lo que tiembla es todo el ayre, ò solamente sus partes mas sutiles, cuya determinacion no es para este lugar.

Confirmase tambien lo dicho con las siguientes experiencias : si dentro de vn pequeño aposento se tañen Violones, ò Lyras, ù otros instrumentos semejantes, tiemblan las llamas de las luzes, ajustandose à los tonos que se tañen : lo mismo se observa tañendo vn Violòn cerca de la varilla de humo que sale de vn pavilo ; y si esto mismo se

executa cerca del rayo del Sol, que entra en vn aposento por vn agujero, se advertirà moverse los atomos del ayre, como saltando al son del instrumento; pero para las sobredichas experiencias ha de estàr el aposento bien cerrado: Todo lo qual, no se puede explicar de otra suerte, que diziendo, se mueve el ayre al movimiento de las cuerdas del instrumento; y que comunica su movimiento à la llama, al humo, y à los atomos.

PROP. III. Theorema.

El ayre movido con este movimiento tremulo, impele, y mueve con semejante movimiento al Organo del oìdo.

LO primero, que ocurre en lo interior del oìdo, es vna membrana formada del quinto par de nervios, la qual està estendida, y tensa como la de vn atambor, por lo qual se llama *el tympano del oìdo*; y es el instrumento principal del sentido del oìr.

Digo, pues, que el ayre movido con movimiento tremulo, impele, y mueve con semejante movimiento al tympano del oìdo. Pruebase, porque el ayre està contiguo, mediante el passo, ò transito acustico, con el dicho tympano: luego movido tremulamente el ayre, es forçoso que este mueva con semejante movimiento, y temblor al tympano, de la propria suerte que mueve la llama, y humo, segun las sobredichas experiencias.

PROP. IV. Theorema.

El sonido tomado activamente, consiste en el movimiento tremulo del ayre, que hiere al tympano del oìdo; y tomado passivamente consiste en el movimiento del mismo tympano.

EL sonido considerado *activamente*, es el sonido en quanto naze del cuerpo sonòro; y tomado *passivamente*, es en quanto recibido en el organo del oido. Digo, pues, que considerado activamente, consiste en el movimiento tremulo del ayre; y tomado passivamente, consiste

te en el movimiento tremulo del tympano: la razon es, porque con ſolo eſte movimiento tremulo, ſe explica clara, y ſuficientemente, como los cuerpos ſonòros inmutan, è impreſsionan el ſentido del oìdo; y ſolo con el temblor, y movimiento del tympano, ſe entiende como eſte percibe el ſonido; luego el ſonido conſiſte en el movimiento ſobredicho.

Confirmalo eſto la experiencia, porque ſolamente ſe percibe el ſonido mientras vibra, y tiembla el cuerpo que le cauſa; como ſe vè en la cuerda herida de vn inſtrumento, y en la Campana, que apenas ceſſa el movimiento tremulo, ceſſa el ſonido; luego es, porque ceſſando el movimiento, y temblor de la cuerda, ceſſa el movimiento, y temblor del ayre; y ceſſando eſte, ceſſa tambien el del tympano del oìdo, por depender eſte del movimiento del ayre; y el del ayre, del temblor de la cuerda; luego el ſon activo, y paſsivo conſiſte en los temblores ſobredichos.

Pruebaſe tambien lo miſmo, porque diſparandoſe vn cañon de Artilleria en lugar baſtantemente diſtante, ſe percibe el trueno al miſmo tiempo, y no antes, en que tiemblan las ventanas, y los vidrios que ay en ellas; luego es ſeñal manifieſto que el trueno conſiſte en el eſtremecimiento, y temblor vehemente del ayre. Lo miſmo ſucede en el trueno de las nubes, como ſe verà deſpues.

Ultimamente ſe prueba lo dicho, porque ſuponiendo que el ſonido conſiſta en el temblor del ayre, ſe explican con facilidad las propriedades, y efectos del ſòn, que de otra ſuerte no ſe pueden baſtantemente declarar, como luego veremos, lo que convence la verdad de eſta Propoſicion.

PROP. V. Theorema.

Explicaſe el trueno, y otros ſonidos ſemejantes.

GRan recomendacion de verdadera lleva conſigo la doctrina, que por sì ſola es baſtante para que ſiguiendo el hilo de ſu conſequencia, ſe lleguen à deſcubrir diferentes ſecretos de la naturaleza, y ſe pueda dàr la razon de las propriedades, y efectos de las coſas. Explicarè

en estas Proposiciones las propriedades, y efectos del sonido, segun los principios arriba puestos, lo que serà nueva prueba de su verdad.

Digo, pues, que el trueno consiste en vn temblor grande de el ayre, que formandose repentinamente suele durar poco espacio de tiempo; con este temblor se mueve gran cantidad de ayre, el qual impeliendo con vehemencia al tympano del oìdo, causa en èl aquella fuerte, y desapacible afeccion.

Explicolo en el trueno que forma vn cañon de Artilleria. Inflamadas en su concavidad las partes sulfureas de la polvora, se resuelven repentinamente en ayre las partes nitrosas, las quales pidiendo mayor lugar, impacientes de la carcel, que se les prohibe, salen con impetu, y rompiendo con gran fuerça al ayre à la boca del cañon, le impelen à vna, y otra parte; y bolviendose este à juntar con impetu, forma en brevissimo tiempo muchas, y grandes vibraciones, de quienes impelido el tympano del oìdo; padece aquella grande, y violenta impression, y percibe el trueno.

De la misma suerte quando las partes sulfureas de la nube se inflaman, se dilatan tambien, y convierten repentinamente en ayre las partes nitrosas de la exalacion; y assi rompen el ayre por vn gran trecho, de que se sigue estremecerse este con grandes vibraciones; è impeliendo violentamente al tympano del oìdo, forman el estallido; pero esto pertenece al Tratado de los Metheoros.

Tambien quando se hieren mutuamente dos piedras, el ayre que estaba entre las dos, se aparta à vna, y otra parte, y al restituirse à su lugar, vibra, y causa el ruido que frequentemente oìmos. De esta misma suerte se pueden explicar los demàs sonidos semejantes.

PROP. VI. Theorema.

Explicase la naturaleza del son grave, y agudo.

DE la Proposicion passada se colige la naturaleza del son grande, y pequeño; ò intenso, y remiso; porque aquel

aquel ſonido es intenſo, y grande, que es cauſado del temblor, ò vibraciones de gran cantidad de ayre; el remiſo, ò pequeño es aquel en que es pequeña la porcion de ayre que vibra; y aſsi aquel cauſa mayor impreſsion en el oido, y eſte, menor.

Paſſo aora à explicar en que conſiſta el ſon grave, y agudo, que es lo que directamente pertenece à eſte tratado. Digo, pues, que el ſon agudo, ò alto conſiſte en que las vibraciones del ayre ſean mas frequentes, eſto es, paſſe menos tiempo entre la vna, y la otra; y al contrario el ſon grave conſiſte en que las vibraciones ſean menos frequentes; y que interceda mas eſpacio de tiempo entre la vna, y la otra; y por conſiguiente en el ſonido grave, haze el ayre en vn miſmo tiempo menos vibraciones que en el ſonido agudo.

La verdad de eſta Propoſicion ſe prueba. 1. Porque el ſer vn ſonido agudo, no puede conſiſtir en que el ayre ſe mueva con mayor velocidad, porque tan preſto llega al oido el ſon grave, como el agudo, como lo ateſtigua la experiencia: ni puede conſiſtir en que ſe mueva mayor porcion de ayre, porque (como hemos dicho) eſto ſolamente conduce para que el ſonido ſea grande, è intenſo; y puede el ſon grave ſer mayor, y mas intenſo que el agudo, como ſe vè quando vn contrabajo canta à toda voz, y el tiple à media voz: luego ſolo puede conſiſtir el ſonido agudo en que las vibraciones del ayre ſean mas frequentes, y en vn miſmo tiempo ſucedan mas en numero, que en el ſonido grave.

2. Se prueba con la experiencia, porque vemos que vna cuerda grande haze las vibraciones mas à eſpacio que otra pequeña igualmente tenſa: de ſuerte, que las vibraciones de aquella caſi ſe diſtinguen con la viſta, ſiendo aſsi, que es impoſsible diſcernir las de la pequeña: luego formando eſta el ſon agudo, y aquella el grave, ſe ſigue, que el ſon agudo conſiſte en la brevedad de las vibraciones, y el grave en ſu tardanza. Confirmaſe eſto 1. Por ſer expreſſamente de Ariſtoteles *lib. 2. de Anima, cap. 2. text. 86.* como lo puede vèr el curioſo. 2. Porque con eſto ſe dà ca-

cabal noticia, y razon de las consonancias, y disonancias de las vozes, como luego verèmos.

De esto se colige, lo primero, que aquel son serà mas agudo, en que las vibraciones del ayre fueren mas frequentes, y aceleradas; y aquel mas grave, en que las vibraciones del ayre fueren menos frequentes, y mas tardas. 2. Se colige, que de vna sola vibracion del ayre no se puede percibir son grave, ni agudo: la razon es, porque el son agudo requiere mayor frequencia de vibraciones; y el grave menor frequencia, lo que no se compadece en vna sola vibracion.

Para entender esto con mayor claridad, considerese vn estanque de agua sossegada, y quieta; arrojese dentro vna piedra, y se verà, que toda la agua levanta vnas pequeñas olas en figura circular, las quales se vàn estendiendo hasta las paredes del estanque, vna despues de otra. De esta suerte se debe considerar el ayre, el qual es mucho mas fluido, y facil de mover, que el agua. Apenas, pues, la cuerda herida tiembla, comunica este temblor al ayre, de suerte, que todo se mueve con pequeñas, y frequentes olas, que siguiendose vnas à otras, llegan à impeler, y mover el tympano del oido; y aunque es verdad, que la primera ola, ò vibracion del ayre, yà le hiere, y mueve; pero este movimiento es aun imperceptible al sentido; pero como antes de bolver el tympano à su quietud, llegue segunda ola, aumenta esta el movimiento que causò la primera; y llegando la tercera, aumenta el que causaron las antecedentes, de que resulta el sonido sensible: si se suceden brevemente estas olas vnas à otras, es el sonido agudo; y si mas perezosamente, es grave; pero vna sola, ni haze sonido grave, ni agudo.

PROP. VII. Theorema.

Explicase la naturaleza de los sones consonos, y disonos.

DIximos en la definic. 5. que la consonancia es *vna mixtura, ò agregado de dos vozes, ò sones, agradable al sentido*: y la disonancia, *vn agregado de vozes desagradable al sen-*

sentido. Buscamos aora la razon, por què dos vozes algunas vezes hazen vna mixtura agradable, como quando estàn en quinta, y otras vezes desapacible, como quando estàn en segunda, ò tritono.

Digo, pues, que entonces la mixtura de dos, ò mas vozes es agradable al sentido, y consonancia, quando las vibraciones de la vna, y las de la otra concurren, y se conmensuran dentro de breve espacio de tiempo; y entonces serà disonante, y desapazible la mixtura, quando las vibraciones de ambas cuerdas, ò vozes, ò no se conmensuran, ò vienen à conmensurarse, y concurrir despues de mucho espacio de tiempo.

Sirvan de exemplo dos cuerdas, que en el mismo tiempo en que la vna vibra vna vez, la otra vibra dos vezes: Digo, que sonando juntas hazen consonancia, porque se ajustan presto las vibraciones de la vna con las de la otra, pues à cada dos de la mas velòz, concurriràn las vibraciones de entrambas; pero dos cuerdas, de las quales la vna vibra 32. vezes, mientras la otra vibra 45. resultarà disonancia, porque solo vienen à conmensurarse, y herir juntas al tympano del oido, quando la vna ha hecho 45. vibraciones, y la otra 32. lo qual tarda sobrado.

La razon de esto es, porque quando las vibraciones de la vna cuerda concuerdan con las de la otra, ò llegan à concurrir en breve espacio de tiempo, hieren vniformemente, mediante el ayre al tympano del oìdo; y aunque antes de concurrir hiera algunas vezes la vna sin la otra, pero como luego buelven à concurrir, no se impide la apazibilidad del sonido, que consiste en la vniformidad del movimiento del tympano; antes bien aquella, aunque no discernida variedad, causa mayor deleyte al sentido; pero quando tardan mucho à vnirse las vibraciones de las cuerdas, caben en esse tiempo intermedio muchas vibraciones de las cuerdas, que sin orden, ni concierto hieren el tympano, de que resulta impressionarse mas el sentido de aquellos golpes desordenados, que son muchos, que de los ordenados, y vnidos, que son pocos, de que naze aquella desazon, y disgusto, que advertimos en las disonancias.

Para

Para que se conozca con mayor evidencia en què consiste el disgusto, y pena que recibe el oìdo con las disonancias, se ha de suponer, que el tympano del oìdo para poder vibrar con mayor aceleracion, ha menester hazerse mas tirante, y tenso; y para vibrar con menor aceleracion, necessita de hazerse mas laxo, y menos tenso: esto se vè claramente en el parche, ò membrana de vna caxa; y en la cuerda de vna Harpa, que conservando vna misma magnitud, y tension, siempre hazen vn mismo sonido, y sus vibraciones son igualmente aceleradas, sin que sea possible naturalmente accelerarlas, ni remitirlas de otra suerte, que aumentando, ò disminuyendo la tension, ò variando la magnitud de la cuerda, ò membrana.

Para que pueda, pues, el tympano del oìdo, conservando siempre vna misma magnitud, acelerar sus vibraciones, es menester se haga mas tenso; y para retardarlas, es necessario remita, y minore su tension; para lo qual diò maravillosamente providencia el Soberano Artifice de la naturaleza; porque assi como en los ojos puso el humor cristalino con vn sutil musculo, que son los *processos ciliares*, con el qual pudiesse contraerse, y dilatarse, mas, ò menos conforme fueren los rayos que à èl llegan de los objetos, como se explicarà en la Optica; assi en el oìdo colocò el tympano, de tal suerte, que pudiesse hazerse mas, ò menos tenso, segun fueren las vibraciones, y vndulaciones de ayre, para lo qual le concediò dos musculos, que tirando, y afloxando aumentassen, ò disminuyessen su tension, proporcionandole con el sobredicho apulso del ayre, como se suele hazer en vna caxa, ò atambor: hazese, pues, mas tenso quando las vibraciones del ayre, con quienes se ha de conformar, son mas frequentes, y velozes; y menos tenso, quando son mas perezosas, y tardas.

De aqui nace aquella pena, y disgusto que siente en las disonancias; porque siendo los movimientos vibratorios de las cuerdas disonantes, tan diferentes, y desordenados, y sus vibraciones tan sin orden, ni concierto, trabajan muchissimo los musculos del tympano para ajustarle, yà al movimiento de la vna cuerda, yà al de la otra, haziendose

dose

dose en aquel breve tiempo yà mas tenso; yà menos tenso, sin que pueda jamàs ajustarse à aquellos descompassados movientos; y esto es lo que causa aquel gran disgusto, y pena que experimentamos, quando oimos dos, ò mas vozes manifiestamente discordes, ò disonantes; como al contrario recibe gran gusto, y placer, quando puede ajustar sus movimientos à los de las cuerdas, y vozes, por ser estos entre sì conformes, como sucede en las consonancias.

Segun esta doctrina, podèmos yà señalar otras definiciones de la consonancia, y disonancia, que expliquen mejor su naturaleza, que las que dimos al principio. Es, pues, la consonancia, *vna mixtura de sonidos, causados de vibraciones brevemente conmensurables*; y la disonancia es *mixtura de dos sonidos, causados de vibraciones, que tarde, ò nunca se conmensuran.*

PROP. VIII. Theorema.

Las vibraciones de dos cuerdas de vna misma materia, y tension, son en quanto à la duracion, como la longitud de las cuerdas. fig. 2.

EXplicacion. Sea la cuerda AE, doblada de la cuerda AB, y sean de vna misma materia, y de igual tension; y supongase, que AE, se trayga con el dedo hasta ACE; y AB, hasta ADB, para que dexandolas libres se restituyan con su movimiento vibratorio, al situ recto, y natural. Digo, que la mayor AE, tirada hasta ACE, gastarà doblado tiempo para restituirse en AE, que ADB, para restituirse en AB. Esta Proposicion se demuestra en la Physica, en el Trat. del cuerpo tenso; y requiere su demonstracion otras Proposiciones, que no podemos poner aqui sin hazer vna gran digressión; bastarà por aora probarla con la razon siguiente.

No ay duda, que siendo, como se supone, igual tension la de la cuerda ACE, que la de la cuerda ADB, serà tambien igual la fuerça, con que ACE, se restituye en AE, que aquella con que ADB, se restituye en AB; luego el movimien-

miento con que ambas se restituyen es igual: luego con igual movimiento se mueve el punto C, por la linea CB, que el punto D, por la linea DF; y como la linea CB, sea doblada de DF, (como se infiere de la Prop.19.lib.6.Eucl.) doblado tiempo gastarà el punto C, para llegar à B, que el punto D, para llegar à F: lo mismo dirè de qualquiera otro punto de la cuerda ACE, comparado con su correspondiente de la cuerda ADB; luego toda la cuerda ACE, que es doblada de ADB, gasta doblado tiempo en restituirse, que ADB.

PROP. IX. Theorema.

Los sones de dos cuerdas de vna misma materia, è igual tension, son reciprocamente como las cuerdas, en razon de grave, y agudo. fig. 2.

SEan las mismas cuerdas AE, AB: digo, que como se hà la longitud AE, con la longitud AB; assi se hà el sonido de AB, en razon de agudo, con el sonido de AE; que es razon reciproca.

Demonstr. (8.) El tiempo que gasta AE, en hazer cada vibracion, se hà con el tiempo que gasta AB, en formar la suya, como AE, con AB; luego siendo, por exemplo, AE, doblada de AB, el tiempo en que haze vna vibracion la cuerda AE, es doblado del que gasta AB, en hazer su vibracion: luego mientras AE, vibra vna vez, vibra AB, dos vezes: luego (7.) la cuerda AB, haze el son doblado agudo, que la cuerda AE; luego assi como esta es doblada de AB, assi el son de AB, es doblado agudo, que el de AE.

COROLARIO.

DE aqui se colige, que los sonidos de las cuerdas de igual tension tienen entre sì reciprocamente la razon subduplicada de los espacios, por donde se mueven dichas cuerdas, quando hazen sus vibraciones: Demuestrase en la forma siguiente. El espacio por donde vibra la cuerda AB, es el triangulo ADB; y el espacio por donde vibra la AE, es el triangulo ACE: estos triangulos, por ser semejantes, tienen entre sì (19. 6. Eucl.) razon duplicada de

de sus basas AB, AE; y estas, razon subduplicada de dichos triangulos, ò espacios; luego siendo el son de AE, al de AB, como AB, à AE, serà dicho sonido de AE, al de AB, en razon reciproca, y subduplicada de los triangulos, ò espacios ADB, ACE: Lo mismo se debe entender por la misma razon en los demàs cuerpos soneros semejantes.

ESCHOLIO.

DE lo dicho se colige bastantemente la verdad de la doctrina referida, que el sonido consiste en las vibraciones, y temblor del ayre; y aunque contra ella no se pueda ofrecer objecion de mucha dificultad, no obstante procurarè dàr solucion à las siguientes, que tienen alguna apariencia.

Objetase lo primero, que estando dentro de vn quarto cerrado, oìmos las vozes, y sonido que se haze fuera: luego este no consiste en las vibraciones del ayre, pues estas no pueden penetrar la pared.

Respondese, que las vibraciones, y temblor del ayre de fuera, se comunican al ayre que està dentro del quarto, por las endrijas, y aberturas, que suele comunmente aver en las ventanas. Comunicase tambien por los poros de las paredes; y esto lo convence la experiencia, pues quanto menos porosas, y mas gordas son las paredes, tanto se percibe menos el sonido de afuera. Confirmase tambien con otra experiencia: Si aplicamos el oìdo à la extremidad de vn gran madero, percibimos los golpes que en la otra extremidad se dan tan ligeros, que el mismo que les executa, no les puede percibir con el oido; lo que es claro señal, que todo el ayre que ay en los poros del madero, se mueve, y vibra hasta el oido aplicado à la otra parte.

Responden otros, y no sin fundamento, que las paredes, y otros cuerpos tiemblan, y vibran quando se haze qualquier ruido; y se confirma con la experiencia, porque al sonido de los bordones de vna Harpa, tiembla muchas vezes el suelo en que el instrumento estriva; y al sonido de las contras del Organo se estremecen las sillas, y maderaje que le componen; y el trueno de Artilleria haze temblar las puertas, y ventanas de lugares muy apartados. Este temblor no puede ser causado de alguna qualidad physica

sica especial, que venga por el ayre: luego previene del impulso con que el ambiente es impelido; luego si en los sonidos grandes este temblor es sensible al mismo tacto, què mucho serà que en sonidos pequeños tiemblen los cuerpos insensiblemente?

Objetase lo 2. si el son consistiera en estas vibraciones del ayre, no podriamos percebir muchos sones juntos à vn mismo tiempo, porque el ayre no puede moverse à vn mismo tiempo con diferentes movimientos, y vibraciones opuestas; y la experiencia atestigua oìrse à vn mismo tiempo sones diferentes, como de vozes, Campanas, &c. Respondese con facilidad, diziendo, que vn cuerpo sonòro no mueve todas las partes del ayre; y asi puede muy bien el mismo ayre ser movido con diferentes movimientos, y vibraciones, en diferentes particulas del mismo ayre, sin que vnas à otras se interrumpan notablemente. Esto se vè en vn estanque de agua, que si arrojamos en èl diferentes piedras, cada vna mueve à la agua con diferentes circulos, los quales se cortan vnos à otros sin interrumpirse, ni perturbarse.

Objetase lo 3. que consistiendo el sonido en las vibraciones del ayre, no podria percibir el oìdo la distancia del cuerpo que produce el sonido. Respondese, que esta distancia se percibe lo primero, porque el sonido que se forma lexos, quando llega al oìdo es mas remiso; y por esta mayor, ò menor remision, se percibe la distancia del cuerpo sonòro. Lo segundo, porque las vibraciones se forman en el ayre à manera de circulo, en cuyo centro està el cuerpo sonòro que las forma; y no ay duda, que quanto estas vibraciones se apartan mas del centro son mayores, y por consiguiente menor porcion de aquel circulo hiere al sentido que està lexos; y mayor porcion al que està mas cercano; y esta diferencia basta para que el oìdo perciba la mayor, ò menor distancia del cuerpo sonòro.

PROP.

PROP. X. Theorema.

Resuelvense de lo dicho algunas dificultades curiosas.

DIficultase lo 1. por què tocando vna cuerda, resuena otra sin tocarla? y tañendo vn instrumento, responde otro que està templado al mismo punto? Respondo, que quando tocamos vna cuerda, esta mueve, y haze temblar el ayre con el mismo movimiento que ella tiene: este ayre encontrando con la otra cuerda consona, la mueve algo con la primera vibracion; despues aumenta su movimiento con la vibracion segunda; y mas con la tercera, hasta que sensiblemente la haze vibrar; y como en este temblor consista el sonido, es forzoso que al son de la vna, resuene la otra: lo mismo es en los instrumentos acordes. Pero si las dichas cuerdas no estuvieren consonantes, aunque se toque la vna no por esso vibrarà, ni resonarà la otra: la causa es; porque siendo sus vibraciones casi inconmensurables, no pueden las de la vna ayudar el movimiento de la otra, antes le resisten, è interrumpen.

Para mayor explicacion, sean dos cuerdas vnisonas, è iguales A, y B. (fig. 3.) Quando la cuerda A, se trae con el dedo hasta I, apenas se dexa libre, se mueve hasta O; è impele el ayre; el qual encontrando con la cuerda B, la mueve àzia C; con que quando I, llega à O, llega B, à C: Buelvese O, por A, hasta cerca de I, y de I, buelve otra vez àzia O: y en el mismo tiempo C, bolviò tambien à D; y desde D, buelve azia C; con que al mismo tiempo en que I, và segunda vez a O; D, buelve àzia C: y como I, bolviendo à O, impela otra vez el ayre azia la cuerda B, hallando este à la cuerda B, que tambien camina àzia C, le añade nuevo impulso; y le aumenta su movimiento; y desta suerte, repitiendo sus vibraciones, le aumenta hasta que le haze sensible; y resuena la cuerda B, sin que mano alguna la toque. Lo mismo sucede en las cuerdas templadas en otra consonancia por la misma razon: pero si estan disonantes sucede al contrario, porque aunque el ayre impelido de la primera vibracion de la vna, mueva algo la

otra cuerda; pero la segunda vibracion lleva su movimiento encontrado con el de la otra ; con que en lugar de aumentarle le destruye ; y assi no puede producir sonido.

De aqui se colige tambien la razon , porque tocando vna cuerda , resuena mas la que està en octava , que la que està en quinta; y esta mas que la que està en quarta, &c. como lo atestigua la experiencia : la razon es , porque en la octava concurren mas presto las vibraciones de entrambas cuerdas ; luego el movimiento de la vna aumenta mas aprisa el de la otra : lo mismo digo de la quinta , respecto de la quarta , como se colige de lo que mas adelante dirèmos.

Dificultase lo 2, porque al sonido de las mayores flautas del Organo , que llaman *contras* , tiemblan sensiblemente los bancos , sillas , y demàs maderaje del Organo ; y al sonido de las menores no se percibe el dicho temblor. Tambien por què no se percibe el temblor sobredicho al sonido de qualquiera contra, sì solo de algunas determinadas? Respondese à lo primero , que las flautas pequeñas tienen mas agudo el sonido : luego (6.) las vibraciones que causan en el ayre son muy velozes , y pequeñas ; y assi no pueden por su delicadeza , y pequeñez excitar temblor alguno semsible en los dichos cuerpos ; pero las contras tienen el sonido grave , y por consiguiente son grandes las vibraciones que causan en el ayre; y assi son bastantes para comunicar su impulso al maderaje, hasta hazerle temblar.

Para responder à lo segundo , se ha de suponer , que las fibras, y textura de la madera, tienen mayor, ò menor tension , segun fuere su calidad ; y por consiguiente està mas ajustada, y proporcionada à vnas contras que à otras; y assi no ay que estrañar tiemblen vnas al tañer vna contra , y otras al tañer otra ; por la misma razon que diximos moverse vna cuerda solamente al sonido de otra que tiene con ella alguna consonancia. Esta es la causa porque algunos bancos, y sillas tiemblan al sonido de la contra C, sol fa vt, y otras al tañer D, la sol re, &c.

Dificultase lo 3. por què quando se taño el Organo, solo se percibe de lugar apartado el sonido de las contras, y

no el de las flautas menores? Respondo ser la causa, porque las vibraciones del ayre causadas por las contras, son mayores, y es impelida en ella mayor copia de ayre, y assi se estienden à mayor espacio que las vibraciones causadas por las fistulas menores.

CAPITULO II.

DE LAS CONSONANCIAS, Y DISONANCIAS en particular.

LOs principales intervalos son los siguientes: *Unisono* (aunque este no lo es propriamente) *tono, ò segunda; semitono; ditono, ò tercera mayor; semiditono, ò tercera menor, diatesaron, ò quarta; tritono; diapente, ò quinta; semidiapente, ò quinta remisa; sexta mayor, ò exacordo mayor; sexta menor, o exacordo menor; septima mayor, ò eptacordo mayor; septima menor, ò eptacordo menor; y diapason, ò octava.*

Para hazer cabal concepto de estos intervalos, se ha de suponer, que las vozes, con que và poco à poco subiendo la entonacion tienen los siguientes nombres: *Vt, re, mi, fa, sol, la.* De suerte, que de vna voz, à su inmediata, solo se sube por aquellos intervalos menores, que naturalmente solemos formar cantando, que son tonos, y semitonos; porque de qualquiera voz de las sobredichas à su inmediata ay tono, exceptuando del *mi* al *fa*, que ay semitono.

A mas de esto, por consistir las consonancias, y disonancias en cierta razon, y proporcion de las vozes que las forman, serà conveniente suponer las diferentes especies de razon que puede aver entre dos cantidades desiguales, y los nombres proprios que las distinguen; lo que omiti en el lib. 5. de la Geometria Elementar, por no aumentar el numero de sus definiciones, singularmente no siendo alli necessaria su noticia.

Cinco especies de razon, ò relacion puede aver de vna cantidad mayor à otra menor. La primera, si el antece-

dente contiene al consequente vna vez, y alguna parte mas, se llama razon *superparticular*; y si la parte es vna mitad mas, se llama, *sesquialtera*; como 3. à 2. ù 6. à 4. si dicha parte fuere vn tercio, es *sesquitercia*, como 4. à 3. si vn quarto, *sesquiquarta*; como 5. à 4. y assi infinitamente.

La segunda, si el antecedente incluye vna vez al consequente, y algunas partes mas, se dize, *superparciente*; si las partes son dos tercios, se dize, *superbiparciens tercias*; como 5. à 3. si contiene tres quartos, se llama, *supertriparciens quartas*, como 7. à 4. y assi de las demàs.

La tercera especie, es quando el antecedente incluye algunas vezes justamente al consequente, y se llama, *multiplice*; si la incluye dos vezes, se llama razon *dupla*; si tres vezes, *tripla*, &c.

La quarta, quando el antecedente incluye al consequente muchas vezes, y alguna parte mas; y porque se compone de la primera especie, y de la tercera, se llama, *multiplice superparticular*; si le contiene dos vezes, y media, serà *dupla sesquialtera*; como 5. à 2. si le incluye quatro vezes, y vn tercio, serà *quadrupla sesquitercia*, como 13. à 3. &c.

La quinta; es quando el antecedente contiene al consequente muchas vezes, y algunas partes mas; y porque se compone de la segunda, y tercera especie, toma de las dos el nombre, llamandose, *multiplice superparciente*; si le contiene dos vezes, y tres quartos, serà *dupla supertriparciens quartas*, como 11. à 4. si le incluye tres vezes, y dos quintos, *tripla superbiparciens quintas*, como 17. à 5. &c.

Quando el antecedente, es menor que el consequente, ay otras cinco especies con los mismos nombres, solo que se les añade añtes la particula *sub*; como 3. à 2. es *sesquialtera*; y 2. à 3. *subsesquialtera*; 4. à 2. es *dupla*; y 2. a 4. *subdupla*; y assi de las demàs.

PROP. XI. Theorema.

Explicanse las consonancias, y disonancias; y sus proporciones en numero.

UNisono, es repeticion de vna misma voz, sin baxar, ni subir, como *vt*, *vt*; *re*, *re*, &c. con que dos vo-

zes vnisonas tienen entre sì en razon de grave, y agudo, razon de igualdad, como 1. à 1.

Tono, ò *segunda*, es el intervalo, ò distancia que ay de vna voz à su inmediata, exceptùando del *mi* al *fa*; y assi del *vt* al *re* ay tono: del *re* al *mi* tono: del *fa* al *sol* tono; y assimismo del *sol* à *la*. Llamase *segunda*, porque consta de dos vozes inmediatas, subiendo naturalmente, ò baxando. Llamase tambien, *segunda mayor*, à distincion del semitono, que se llama, *segunda menor*.

Aqui se ha de notar que ay dos maneras de tonos: esto es, *tono mayor*, y *tono menor*, aunque la entonacion practica, y que sube, ò baxa por grados, no les distingue. El *tono mayor*, consiste en la proporcion sesquioctava, como 9. con 8. esto es, las dos vozes que le forman, tienen en razon de grave, y agudo la razon de 9. con 8. y por esso se llama *sesquioctavo*: El *tono menor* consiste en la proporcion sesquinona, como 10. con 9. y assi se llama *sesquinono*. La razon de esto verèmos mas adelante.

Semitono, es el intervalo que ay entre el *mi*, y el *fa*: Tambien ay dos semitonos, mayor, y menor: El *semitono mayor* consiste en la proporcion *sesquidecima quinta*, como 16. con 15. El *semitono menor*, consiste en la proporcion *sesquivigesima quarta*, como 25. con 24. Al semitono mayor, llaman los practicos, *cantable*; y al menor, *incantable*: entre que vozes se halle el vno, y el otro se verà despues. Algunos Autores llaman al semitono menor, *diesi mayor*, à contra distincion de la *diesi menor*, ò *diesi harmonica*, que es la diferencia del semitono mayor, y menor, y es propriamente *diesi*.

Ditono, ò *tercera mayor*, es vn intervalo, que consta de dos tonos, como *vt*, *mi*, ò *fa*, *la*: consta de dos tonos, porque del *vt* al *re* ay vn tono, y del *re* al *mi* otro tono; y assimismo del *fa*, al *sol*, y del *sol* à *la*. Llamase *tercera*, porque subiendo por grados, naturalmente se tocan tres vozes, *vt*, *re*, *mi*, o *fa*, *sol*, *la*; es muy agradable al oìdo, y consiste en la proporcion *sesquiquarta*, como 5. con 4.

Semiditono, ò *tercera menor*, es vn intervalo, que consta

de vn tono, y vn semitono, como del *re* al *fa*, ù del *mi* al *sol*. Formandola por grados, se tocan tambien tres vozes, como *re*, *mi*, *fa*, de las quales las dos primeras comprehenden vn tono, y las dos vltimas el semitono; Tambien *mi*, *fa*, *sol*, en que las dos primeras forman el semitono; y las dos vltimas el tono. Consiste en la razon de 6. à 5. llamada *sesquiquinta*.

Diatesaron, ò *quarta*, es vn intervalo, que consta de dos tonos, y vn semitono mayor; como del *vt* al *fa*, ay quarta, porque del *vt* al *re* ay tono; del *re* al *mi*, otro tono; y del *mi* al *fa*, ay semitono mayor: lo mismo se hallarà del *re* al *sol*, y del *mi* al *la*. Llamase *quarta*, porque formandola por grados, ò puntos, se encuentran quatro vozes, *vt*, *re*, *mi*, *fa*. Consiste en la razon de 4. con 3. que es *sesquitercia*.

Tritono, es vn intervalo muy desapacible, compuesto de tres tonos, y consiste en la razon de 45. con 32. Despues verèmos entre què terminos se forma.

Diapente, ò *quinta*, es vn intervalo, que consta de tres tonos, y vn semitono mayor, y subiendo gradatim se encuentran cinco vozes: Hallase del *vt* al *sol*; porque del *vt* al *re*, ay vn tono; del *re* al *mi*, otro; del *mi* al *fa*, ay semitono; y del *fa* al *sol*, tono: tambien se forma del *re* al *la*. Es consonancia muy apacible, y consiste en la razon *sesquialtera*, como 3. à 2.

Semidiapente, ò *quinta remisa*, es vn intervalo, que consta de dos tonos, y dos semitonos mayores. Consiste en la razon 64. à 45. es algo mayor que el tritono, su formacion se verà despues.

Sexta menor, ò *exacordo menor*, es vn intervalo, que consta de tres tonos, y dos semitonos mayores, consiste en la razon de 8. à 5.

Sexta mayor, ò *exacordo mayor*, es vn intervalo, que consta de quatro tonos, y vn semitono mayor, como del *vt* al *la* consiste en la razon de 5. con 3.

Eptacordo menor; ò *septima menor*, es vn intervalo, que consta de quatro tonos, y dos semitonos mayores; consiste en la razon de 9. à 5.

Epta-

Eptacordo mayor, ò septima mayor, es vn intervalo que consta de cinco tonos, y vn semitono; y consiste en la razon de 15. con 8. entrambas septimas son disonancias.

Diapason, ò octava, es la consonancia principal, y es vn intervalo que consta de cinco tonos, y dos semitonos mayores, ù de la quinta, y quarta juntas: consiste en la razon *dupla*, como 2. à 1.

PROP. XII. Theorema.

Explicanse los mismos intervalos con lineas, ò cuerdas.

EN esta Proposicion se harà mas claro lo que se dixo en la antecedente, explicando con lineas lo què alli se propuso en numeros. Tomamos aqui por lineas las cuerdas, ò sean de alambre; ò otra materia sonora, estendidas, y tensas sobre vn instrumento; y aunque es verdad que estas son cuerpo, pero las consideramos como lineas, atendiendo solamente à su longitud, y suponiendolas en lo demas totalmente iguales.

Sean, pues, dos cuerdas AB, CD (fig. 4.) iguales, tanto en la craficie, como en la tension, y longitud: digo, que tañendo la vna, y la otra haràn vn mismo sonido, y concordaràn formando *vnisono*: la razon es, porque (8.) las vibraciones, en quanto à la duracion, son como las cuerdas: luego siendo las dos iguales, sus vibraciones seràn iguales en la duracion: luego siempre heriràn al sentido à vn mismo tiempo: luego (7.) son consonas, y estàn sus sonidos en razon de igualdad, como 1. à 1.

Dividase la cuerda CD, en dos partes iguales en el punto E; y puesto vn banquillo en E, toquese toda la cuerda AB, y la mitad CE; digo, que consonaràn en diapason, ò octava: la razon es, porque (9.) los sonidos de las cuerdas, y el numero de las vibraciones, que forman en vn mismo tiempo, se hàn reciprocamente como las cuerdas: esto es, como la cuerda AB con CE, assi el numero de las vibraciones de CE, al numero de las vibraciones de AB; y siendo AB, doblada de CE, harà en vn mismo tiempo dobladas vibraciones CE, que AB: esto es, mientras AB, ha-

ze vna, CE, harà dos: luego cada vibracion de AB, concuerda, y se junta con la segunda CE; luego consonoràn en octava: de suerte, que suponiendo que AB, suene *vt*, si se sube cantando *vt, re, mi, fa, sol, la, si, vt*; ò *vt, re, mi, fa, sol, re, mi, fa*, formarà la cuerda CE, la voz mas alta de las ocho, que es la consonancia que llamamos *octava*; y porque esta sale de las vozes de las cuerdas, la vna dupla de la otra, tienen tambien sus sones en razon de grave, y agudo la razon dupla; donde se vè claramente la razon Physico-Mathematica, porque la octava es consonancia, y consiste en razon dupla: lo mismo se dize, respectivamente en los demàs intervalos, y assi no sera menester detenernos tanto en ellos.

Dividase la cuerda CD, en tres partes iguales; y tomando de ellas las dos FD, si puesto el banquillo en F, se tañen FD, y AB: digo, que consonaràn en quinta: la razon es, porque toda AB, es tres partes, y de essas es FD, dos; luego [9.] FD, vibra tres vezes, mientras AB, vibra dos: luego a cada dos vibraciones de AB, se juntan las de ambas cuerdas; y assi [7] es fuerza que consuenen; y sus vozes seràn como 3. con 2. y serà la consonancia diapente, ò quinta; y subiendo, *vt, re, mi, fa, sol*; serà el sonido de AB, *vt*; y el de FD, *sol*.

Dividase la cuerda CD, en quatro partes iguales, y puesto el banquillo en G, de suerte, que GD, sea tres quartas, toquese la cuerda AB, juntamente con GD, digo, que consonaràn en quarta. La razon es, porque suponiendo estàr AB, dividida en quatro partes, tiene la GD, tres de ellas; luego (9) mientras AB, vibra tres vezes, vibra GD, quatro; luego la quarta vibracion de esta concurre con la tercera de aquella: luego haran consonancia, y seran sus vozes como 4. a 3. y oiremos en ellas el intervalo de *vt, fa*, que es el diatessaron, ò quarta.

Dividase la cuerda CD, en cinco partes iguales; y puesto el banquillo en H, sera toda AB, 5. y HD, 4. luego [9.] mientras AB, vibra quatro vezes, vibra HD, cinco; y por consiguiente, tocando ambas cuerdas, sera el sonido de HD, con el sonido de AB, como 5. con 4. y se oira la con-

consonancia, è intervalo *vt*, *mi*, ò *fa*, *la*, que es la tercera mayor. De esta misma suerte se experimentaràn en las dichas cuerdas los demàs intervalos; como si CD, se supone dividida en 45. partes, y se toman las 32. formaràn estas con toda la cuerda AB, el tritono.

Aqui se vè claramente, quan fundada estè la doctrina del sonido que arriba dixe, assi en principios Physicos, como Mathematicos. Esto mismo que se ha explicado en las cuerdas, se debe aplicar à las flautas del Organo, y otros instrumentos, como verèmos mas adelante.

CAPITULO III.

DE LA LOGISTICA, Y ORIGEN DE LAS consonancias.

EL Diapason, ò octava incluye en cierta manera todos los otros intervalos harmonicos; y assi todos nazen de la division del diapason, y de sus partes; yà sumando, ò componiendo vnas con otras; yà restando, ò dividiendo las vnas de las otras, como se verà en las Proposiciones de este capitulo; para lo qual es necessaria la logistica de las consonancias, que consiste en hallar vn medio harmonico; y en algunos casos, si bien pocos, el Geometrico, y Arithmetico; y tambien en sumar, y restar, ò componer, y dividir las consonancias, todo lo qual explico aqui con brevedad.

PROP. XIII. Problema.

Hallar vn medio Geometrico.

HAllar vn medio Geometrico consiste en hallar vn numero, que puesto entre los dos que se dàn, componga con ellos vna progression Geometrica; y que la misma razon aya del primero al medio, que de este al tercero. Sean los numeros 2. 8. Pidese el medio Geometrico;

trico : La regla es, que se multiplique el vno por el otro, y que del producto se saque la raiz quadrada : multiplico, pues, 8. por 2. y del producto 16. saco la raiz quadrada 4. Digo, que 4. es medio Geometrico. Todo queda demonstrado en el Tratado de la Arithmetica Superior.

PROP. XIV. Problema.

Hallar vn medio Arithmetico.

COnsiste en hallar vn numero entre los que se dàn, que componga con ellos vna progresion Arithmetica: de suerte, que el excesso del mayor al medio, sea igual al excesso del medio al menor. La regla es, sumar los numeros dados; y la mitad de la suma, serà el medio que se busca.

Exemplo. Pidese vn medio Arithmetico entre 4. y 8. sumense, y serà la suma 12. cuya mitad 6. es el medio que se pide; y son los tres 4. 6. 8. Queda demonstrado en la Arithmetica Inferior.

PROP. XV. Problema.

Hallar vn medio harmonico.

COnsiste en hallar vn numero entre otros dos, tal, que la diferencia del mayor, y medio, tenga con la diferencia del medio, y menor, la misma razon que el mayor al menor. La regla para hallarle es, hallar primeramente (14.) vn medio Arithmetico; luego se multiplicaràn el mayor por el medio; el mayor, por el menor; y el medio, por el menor; y saldràn tres terminos nuevos en proporcion harmonica.

Exemplo. Si se diere vna razon dupla, como de 4. à 2. y se pidiere entre sus terminos vn medio harmonico: hallo primeramente el medio Arithmetico 3. y son Arithmeticamente proporcionales 4.3.2. multiplico despues 4. por 3. y salen 12. y 4. por 2. y salen 8. y 3. por 2. y producen 6. Digo, que estos tres terminos nuevos 12. 8. 6. son harmonicamente proporcionales, y que 8. es el medio harmo-

monico; lo que se vè claramente, porque la diferencia de 12. y 8. que es 4. tiene con la diferencia de 8. y 6. que es 2. razon dupla; assi como la tienen los extremos 12. y 6. queda, pues, la razon dupla de 4. con 2. ù de 12. con 6. dividida con vn medio harmonico.

Esta regla consiste en que el termino medio de la proporcionalidad Arithmetica, multiplicando los extremos, produce los extremos de la harmonica; y los extremos de la Arithmetica, multiplicados entre sì, producen el medio harmonico; y demonstrado esto, quedara demonstrada la regla.

Demonstr. Por multiplicarse los extremos 4. y 2. por el mismo numero medio, que es 3. han de salir los productos 12. y 6. con la misma razon de 4. à 2. [17.7. Eucl.] tambien multiplicando 2. por 4. para hallar el medio, sale 8. luego multiplicando el 3. que es mas que 2. por el mismo 4. tendrà el producto 12. ademàs del 8. tantas vezes el dicho excesso, como ay vnidades en el 4. Y por la misma razon, si multiplicando el 2. al 3. salen 6. porque 4. excede al 3. multiplicando 4. por el mismo 2. para hallar el medio, saldrà el producto 8. que ademàs del 6. tendrà tantas vezes en sì al excesso de 4. à 3. como ay vnidades en el 2. y siendo el excesso de 4. à 3. igual con el excesso de 3. à 2. siguese, que el 12. ademàs del 8. contiene al dicho excesso tantas vezes, quantas ay vnidades en el 4. y que el 8. ademàs del 6. contiene tantas vezes el dicho excesso, como ay vnidades en el 2. luego lo que incluye el 12. ademàs del 8. tiene la misma razon con lo que incluye el 8. sobre el 6. que tiene 4. con 2. ò 12. con 6. luego 8. es medio harmonico.

PROP. XVI. Problema.

Sumar, ò componer consonancias.

SUmar, ò componer consonancias, es lo mismo que multiplicar quebrados. Dispónganse los numeros que expressan la razon de las consonancias en forma de quebrados; y multiplicando numerador por numerador, y deno-

nominador por denominador, saldrà vn nuevo quebrado; formado de los productos, y este serà la suma, ò composicion de las consonancias. Sirva de exemplo, se han de sumar vna quarta, y vna quinta: Dispónganse sus numeros como quebrados; y multiplicando numerador por numerador; y denominador por denominador, sale vn nuevo quebrado, que es 12. sextas: esto es, vna dupla, que es vn diapason, ò octava, que reducido à minimos terminos, es como 2. à 1.

$$\frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{12}{6}$$

La razon de esto es, porque como los intervalos, ò consonancias consistan en proporcion, sumar, ò por mejor dezir, componer dos consonancias, es lo mismo que buscar vna otra consonancia, que consista en vna razon compuesta de las razones de las otras dos; y por la regla dada, se halla esta razon compuesta, como consta de los Tratados antecedentes, y demuestra el P. Clavio sobre la Prop. 5. del lib. 6. de Eucl.

PROP. XVII. Problema.

Restar, ò dividir vna consonancia de otra.

Restar, ò dividir vna consonancia de otra, es lo mismo que partir vn quebrado por otro: Dispónganse, pues, los numeros que expressan la razon de las consonancias, en forma de quebrados; y multiplicando en Cruz, el numerador del primero à la izquierda; por el denominador del segundo, se hallarà el nuevo numerador; y multiplicando el denominador del primero por el numerador del segundo, saldrà el nuevo denominador; y el nuevo quebrado serà el residuo que se busca.

Exemplo. Si de vna octava se ha de restar vna quarta; esto es, de vna dupla vna sesquitercia, se dispondràn los numeros, que expressan dichas razones, como se ve: Y multiplicando segun las lineas dos vezes 3. son seis, y vna vez 4. es 4. es el residuo 6. quartos; que es la razon de 6. à 4. esto es, vna sesquialtera, ò quinta; y assi, digo,

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{4}$$

digo, que restando vna quarta de vna octava, queda vna quinta: la razon de la regla dada es, porque si sumar consonancias es multiplicar quebrados; el restar, opuesto al sumar, se harà por la regla contraria al multiplicar, que es el partir.

PROP. XVIII. Problema.

Division del diapason, y origen de los intervalos.

DIvidese qualquiera consonancia en dos partes; hallando vn medio entre los numeros, que explican la proporcion de sus vozes: Si este medio es Geometrico, queda dividida la consonancia en dos partes iguales, ò en dos razones, intervalos iguales; pero si este medio es Arithmetico, ò harmonico, queda divida en dos partes, ò razones, è intervalos desiguales; con esta diferencia, que el medio Arithmetico da la consonancia, è intervalo mayor arriba en las vozes agudas; pero el medio harmonico dà la consonancia mayor abaxo, en las vozes graves.

De todas estas divisiones, la Geometrica tiene poco vso en la Musica, por faltarles à las partes de la division la perfeccion, que rigurosamente requieren los intervalos harmonicos: La Arithmetica, y harmonica dàn perfectos los intervalos de la division, cada vno con la cantidad que requiere; pero siempre la division harmonica es mejor que la Arithmetica, por parecer mas plausible al oido, que la consonancia mayor estè en las vozes graves: La razon es, porque estas se forman de vibraciones mayores, y hazen mas impression en el oido; con que formandose la mejor consonancia (que es la mayor) en las vozes graves, queda el oido mas impressionado de lo que es mas perfecto; por lo qual, necessariamente ha de parecer mejor, y mas dulze el concurso de tres vozes que forman la consonancia mayor sobre el baxo, como *vt, sol, fa*; que las que forman sobre el baxo la consonancia menor, como *vt, fa, fa*.

Dividiendo, pues, el diapason, que es la razon dupla de 2. à 1. ù de 12. à 6. harmonicamente, serà 8. el medio harmonico, y quedarà el diapason dividido en dos conso-

nan-

nancias, ò razones, la vna de 12. à 8. que reducida à los minimos terminos, es como 3. con 2. diapente, ò quinta; y la otra de 8. con 6. que reducida es como 4. à 3. diatesaron, ò quarta; donde se vè que el diapason, ò octava se compone de vna quinta, y vna quarta, que es el diapente, y diatesaron.

Si esta division se hiziere Arithmeticamente, saldrian los mismos intervalos de quinta, y quarta; pero la quarta estaria en la parte grave, y la quinta en la mas alta, como se vè, que hallando el medio Arithmetico 9. seràn los tres 12. 9. 6. y la razon de 12. à 9. ù de 4. à 3. que es el diatesaron, sale en la parte grave; y la de 9. con 6. ù de 3. con 2. que es el diapente sale en la parte aguda.

Dividase el diapente, que es la razon sesquialtera de 3. à 2. con vn medio harmonico; y para esto tomo otros numeros mayores, que guarden la misma razon, y sean 30. y 20. y serà el medio harmonico 24. y quedara dividido el diapente, ò quinta en otras dos razones, ò consonancias, que son la primera de 30. con 24. ù de 5. con 4. que es el ditono, ò tercera mayor; y la segunda de 24. à 20. ù de 6. à 5. que es el semiditono, ò tercera menor: de suerte, que el diapente se compone de dos terceras, vna mayor, y otra menor.

Los otros intervalos harmonicos nacen de la composicion, y division de las sobredichas consonancias, que son las principales, sumando vnas con otras, [16.] ò restando vnas de otras. (17.)

Sumando, pues, el diatesaron, ò quarta, con el ditono, ò tercera mayor: esto es, la razon de 4. à 3. con la de 5. à 4. sale la razon de 20. à 12. que es la misma que de 5. à 3. y es el exacordo mayor, ò sexta mayor.

$$\frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{20}{12}$$

Assimismo, sumando el diatesaron, ò quarta con el semiditono, ò tercera menor: esto es, la razon de 4. à 3. con la de 6. à 5. sale la razon de 24. à 15. que es la misma que de 8. à 5. y es el exacordo menor, ò sexta menor.

$$\frac{4}{3} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{24}{15}$$

Ref-

Reſtando el diateſaron , ò quarta del diapente , ò quinta: eſto es, la razon de 4. à 3. de la razon de 3. à 2. reſta la razon de 9. à 8. que es el tono mayor , ò ſeſquioctavo; con que tono mayor es el exceſſo de la quinta à la quarta.

$$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{8}$$

Reſtando el ſemiditono , ò tercera menor del diateſaron , ò quarta : eſto es, la razon de 6. à 5. de la razon de 4. à 3. ſerà el reſiduo la razon de 20. à 18. ù de 10. à 9. que es el tono menor , ò ſeſquinono ; con que el tono menor es el exceſſo de la quarta , à la tercera menor.

$$\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{20}{18}$$

De aqui ſe prueba evidentemente que ay tono mayor, y menor , porque es cierto que la quinta excede à la quarta en vn tono ; y el diateſaron , ò quarta excede à la tercera menor tambien en vn tono ; y ſiendo eſtos exceſſos deſiguales : es à ſaber , aquel como 9. con 8. y eſte como 10. con 9. ſiguеſe aver dos tonos deſiguales.

Siguеſe tambien de aqui, que el ditono, ò tercera mayor conſta de dos tonos , vno mayor; y otro menor ; porque ſi reſtamos el tono mayor de la tercera mayor: eſto es, la razon de 9. à 8. de la de 5. à 4. es el reſiduo la razon de 40. à 36; ù de 10. à 9. que es el tono menor.

$$\frac{5}{4} \times \frac{9}{8} \times \frac{40}{36}$$

Reſteſe el ditono , ò tercera mayor del diateſaron , ò quarta : eſto es , la razon de 5. à 4. de la de 4. à 3. y quedarà la razon de 16. à 15. que es el ſemitono mayor ; con que el ſemitono mayor es el exceſſo de la quarta à la tercera mayor.

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{16}{15}$$

Reſteſe la tercera menor , de la tercera mayor : eſto es, la razon de 6. à 5. de la de 5. à 4. y quedarà la razon de 25. à 24. que es el ſemitono menor ; con que eſte es el exceſſo de la tercera mayor à la menor.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{25}{24}$$

Reſteſe el ſemitono menor del ſemitono mayor : eſto

es,

es, la razon de 25. à 24. de la de 16. à 15. y serà el residuo la razon de 384. à 375. ò hecha la reduccion de 128. à 125. que es la diesis Enharmonica; la qual propriamente es la diferencia del semitono mayor, y menor.

$$\frac{16}{15} \times \frac{25}{24} \times \frac{384}{375}$$

Ultimamente restese el tono menor del tono mayor: esto es, la razon de 10. à 9. de la razon de 9. à 8. y saldrà la coma, que es la razon de 81. à 80. con que la coma es la diferencia del tono mayor, y menor.

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{81}{80}$$

Estos son los intervalos harmonicos mas principales, que se hallan dentro los limites de la octava, cuyas proporciones, juntamente con las de otros intervalos van recopiladas en la Tabla siguiente.

Coma.	81. à 80.
Diesis Enharmonica.	128. à 125.
Semitono menor.	25. à 24.
Semitono mayor.	16. à 15.
Tono menor.	10. à 9.
Tono mayor.	9. à 8.
Tercera menor.	6. à 5.
Tercera mayor.	5. à 4.
Quarta, ò diatesaron.	4. à 3.
Quinta, ò diapente.	3. à 2.
Tritono.	45. à 32.
Quinta remisa, ò semidiapente.	64. à 45.
Sexta menor, ò exacordo menor.	8. à 5.
Sexta mayor, ò exacordo mayor.	5. à 3.
Septima menor, ò eptacordo menor.	9. à 5.
Septima mayor, ò eptacordo mayor.	15. à 8.
Octava, ò diapason.	2. à 1.

Para que mas facilmente se tengan en la memoria las proporciones de los intervalos que con mayor frequencia suelen ofrecerse, tenganse presentes los numeros que ay consecutivamente de 1. hasta 10. menos el 7. y en ellos

ellos se hallaràn los intervalos sobredichos:

Tono menor.	10. à 9.
Tono mayor.	9. à 8.
Sexta menor.	8. à 5.
Sexta mayor.	5. à 3.
Tercera menor.	6. à 5.
Tercera mayor.	5. à 4.
Quarta.	4. à 3.
Quinta.	3. à 2.
Octava.	2. à 1.

Faltanos explicar el origen del tritono, de la quinta remisa, y de las septimas mayor, y menor. Restese el semitono mayor, ò la razon de 16. à 15. del diapente, ò razon de 3. à 2. y quedarà la razon de 45. à 32. que es el tritono.

$\frac{3}{2} \times \frac{16}{15} \times \frac{45}{32}$

Restando el tono mayor, ò la razon de 9. à 8. de la sexta menor, ò razon de 8. à 5. quedarà la razon de 64. à 45. que es el semidiapente, ò quinta remisa.

$\frac{8}{5} \times \frac{9}{8} \times \frac{64}{45}$

Sumando vna quinta con vna tercera menor: esto es, la razon de 3. à 2. con la de 6. à 5. sale la razon de 18. à 10. ù de 9. à 5. que es la septima menor, ò eptacordo menor.

$\frac{3}{2} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{18}{10}$

Sumando vltimamente vna quinta con vna tercera mayor: esto es, la razon de 3. à 2. con la de 5. à 4. sale la razon de 15. à 8. que es la septima mayor, ò eptacordo mayor.

$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{15}{8}$

Todos los sobredichos intervalos se pueden hallar de otra manera, como lo puede probar el curioso.

COROLARIOS.

1. *INfierese de lo dicho el modo de hallar los intervalos mayores que la octava, que son todos los compuestos de la misma octava,*

tava, y algun otro intervalo, porque sumando vna octava; esto es, la razon de 2. à 1. con la tercera mayor, ò razon de 5. à 4. sale la razon de 10. à 4. ò 5. à 2. que es la tercera mayor sobre octava que llaman dezena por constar de diez vozes.

$\frac{2}{1}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{10}{4}$

2. *Sumando la octava con la quinta, ò la razon de 2. à 1. con la de 3. à 2. sale la razon de 3. à 1. que es la quinta sobre octava, que llaman dozena por constar de 12. vozes. Tambien sumando dos octavas, ò dos duplas, sale la quadrupla, que llaman quinzena por constar de 15. vozes; y assi de otros intervalos, que se pueden formar infinitamente.*

$\frac{2}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{2}$

$\frac{2}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{4}{1}$

PROP. XIX. Thoerema.

Determinase de què partes consten los intervalos mayores.

COligese tambien de lo dicho, de què partes consta cada vno de los intervalos mayores, que son todos los sobredichos, menos el *tono, semitono, dièsis, y coma.*

La tercera mayor, consta de vn tono mayor, y otro menor, como queda probado.

La quarta, consta de dos tonos, vno mayor, y otro menor, y de vn semitono mayor: la razon es, porque excede à la tercera mayor en vn semitono mayor, como arriba dixe; luego incluye à la tercera mayor, y vn semitono mayor; y constando la tercera mayor de vn tono mayor, y otro menor, siguese que la quarta consta de lo dicho.

La quinta, ò diapente, incluye à mas de la quarta, vn tono mayor; como arriba se dixo; luego constando la quarta de vn tono mayor, otro menor, y de vn semitono mayor, constarà la quinta de tres tonos, los dos mayores, el otro menor, y de vn semitono mayor.

La octava, ò diapason, se compone de vna quinta, y vna quarta: luego constando la quarta de dos tonos, vno mayor, y otro menor, y de vn semitono mayor; y la quinta de tres tonos, dos mayores, vno menor, y vn semitono mayor; siguese constarà la octava de cinco tonos, tres mayores,

yores, dos menores, y de dos semitonos mayores.

La tercera menor, consta de vn tono mayor, y vn semitono mayor: la razon es, porque la quarta excede à la tercera menor en vn tono menor; y constando la quarta de dos tonos, vno mayor, y otro menor, y de vn semitono mayor, restando de ella el tono menor, excesso en que excede a la tercera menor, quedarà esta en cantidad de vn tono mayor, y vn semitono mayor.

La sexta mayor, consta de quatro tonos, dos mayores, dos menores, y de vn semitono mayor; porque consta de la quarta, y de vna tercera mayor.

La sexta menor, consta de tres tonos, dos mayores, y vno menor, y de dos semitonos mayores; porque consta de la quarta, y de vna tercera menor.

El tritono, consta de tres tonos, dos mayores, y vno menor.

La quinta remisa, ò semidiapente, consta de dos tonos, vno mayor, y otro menor, y de dos semitonos mayores: consta de lo dicho en la Prop. 18. y porque dos semitonos mayores son mas que vn tono mayor, la quinta remisa es intervalo, mayor que el tritono. De la misma suerte se sacarà de què partes consta qualquiera de los demàs intervalos mayores. De quantas comas conste la octava se verà en la Proposicion siguiente.

PROP. XX. Theorema.

Determinase de què partes consten los intervalos menores.

SOn los intervalos menores el *tono mayor*, *y menor*; *semitono mayor*, *y menor*; *diesi*, *y coma.*

El tono menor, que es el sesquinono de 10. à 9. consta justamente de vn semitono mayor, y otro menor; porque sumando la razon de 16. à 15. con la de 25. a 24. sale la razon de 400. con 360. que reducida à los minimos terminos, es 10. a 9. tono menor.

El tono mayor, consta de vn semitono mayor, otro menor, y de vna coma; la razon es, porque excede al tono menor en vna coma: luego incluye los dos semitonos dichos, y vna coma.

El semitono menor, tiene mas de tres comas, y no llega à quatro: el semitono mayor tiene poco mas de cinco; como se puede vèr sumando tres comas, cuya suma se hallarà ser menor que la razon de 25. à 24. y sumando quatro, serà la suma mayor, que la razon dicha de 25. à 24. y menor que la de 16. à 15. y sumando cinco comas, serà la suma algo menor que la razon de 16. à 15. que es el semitono mayor. Veaſe esto en la tabla 7. lib. 2. Propos. 20.

Siguese de aqui, que el tono menor tiene mas de 8. comas, y menos que 9. y el mayor tiene mas de 9. y menos de 10.

Esto, no obstante, se ha de advertir, que los Musicos, dexando esta precision, como poco necessaria para la practica, suponen los tonos iguales, y que cada vno se compone de 9. comas; y de estas dàn 5. al semitono mayor, y 4. al menor, llamado *sustenido*: de que se infiere, que la octava consta de 55. de estas comas; porque se compone de cinco tonos de 9. comas cada vno, y de dos semitonos mayores de 5. comas; pero hablando de la coma rigurosa, y verdadera, que es la diferencia del tono mayor, y menor, y consiste en la razon de 81. à 80. tiene la octava mas de 55. comas, y menos de 56. porque sumando 55. comas, ò razones de 81. à 80. producen vna razon menor que la dupla; y sumando 56. de dichas razones, sale mayor que la dupla. Omito algunas divisiones de los antiguos Griegos, y Pithagoricos, que solo sirven de confusion.

PROP. XXI. Theorema.

Determinase la mayor, ò menor perfeccion de los intervalos simples.

LOS intervalos, ò son *simples*, ò *compuestos*: llamanse *simples*, los que son menores que la octava, ò se incluyen en ella: *compuestos*, los que son mayores que la octava; y por consiguiente, se componen de ella, y de alguno de los intervalos simples: explicare en esta Proposicion la mayor, ò menor perfeccion de los intervalos simples; y en la siguiente, la de los compuestos.

Regla

Regla general. Aquella consonancia es mas perfecta, en que las vibraciones de las vozes, que la componen, se vaen, y ajústan con mayor brevedad, y frequencia; y aquella es menos perfecta, cuyas vibraciones se vnen con menor frequencia.

Para inteligencia de esto, supongo, que entonces las vibraciones de dos vozes, ò cuerdas se dizen concurrir frequentemente, quando sus movimientos son de tal manera conmensurables, que à pocas vibraciones vienen à concurrir, y vnirse; y por consiguiente son pocas las vibraciones que dexan de concurrir.

Esto supuesto, digo, que aquella consonancia es mas perfecta, en que las vibraciones de entrambas cuerdas, ò vozes concurren con mayor frequencia; y por consiguiente, son en ellas menos las vibraciones, que no ajustan perfectamente sus apulsos, à quienes por esta causa llamarè *desordenadas.* La razon es clara, porque quanto fueren menos las vibraciones desordenadas, y se vnieren mas frequentemente los apulsos de las cuerdas, moveràn estas con mayor vniformidad el sentido del oìdo, causando en èl vn suave, y arreglado movimiento; y quanto mas fueren las vibraciones desordenadas, y que hieren el sentido descompuestamente, y sin vnirse, tanto mas causaràn en el vn desordenado movimiento, obligandole à aumentar, y disminuir su tension para ajustarse yà à vnas, yà à otras vibraciones: luego aquellas vozes seràn mas consonantes, que vnieren mas frequentemente sus vibraciones; y aquellas lo seràn menos, que con menor frequencia las vnieren: y por consiguiente, aquellas llegaràn à ser absolutamente disonantes, en que concurrieren muchas vibraciones desordenadas, y tardaren mucho à vnirse; como consta de lo dicho en la Propos. 7. De aqui se puede determinar la mayor, ò menor perfeccion de las consonancias en la forma siguiente.

Del *Unisono*, no ay que dezir mas que sus vozes, por hazer las vibraciones totalmente iguales, concurren siempre las vnas con las otras, y hazen iguales, y vniformes sus apulsos; por lo qual no ay diferencia alguna de la

la vna voz à la otra en razon de grave, y agudo.

El *diapason*, ò *octava*, es perfectissima consonancia, porque en ella cada vibracion de la cuerda grave concurre con la segunda vibracion de la cuerda aguda; luego solo ay vna vibracion de la cuerda aguda que dexe de concurrir, que es lo menos que puede ser; y por consiguiente es el diapason la consonancia mas perfecta.

El *diapente*, ò *quinta*, entre las consonancias simples, es la mas perfecta despues de la octava; porque teniendo sus vibraciones la razon de 3. à 2. la segunda vibracion de la cuerda grave concurre con la tercera aguda; y por consiguiente, tiene solamente tres vibraciones desordenadas: esto es, vna de la cuerda grave, y dos de la aguda; lo que està tan lexos de hazerla disonante, que antes aquella variedad la haze mas agradable al sentido.

El *diatesaron*, ò *quarta*, es consonancia menos perfecta que la quinta: la razon es, porque solo concurre la tercera vibracion de la cuerda grave, con la quarta vibracion de la aguda; y por consiguiente, ay en ella cinco vibraciones desordenadas, que hieren sin concurrir, que son dos de la cuerda grave, y tres de la aguda, lo que la haze yà algo desapacible; pero esto no obstante juzgo ser mejor que los otros intervalos simples que se siguen, como luego verèmos.

Siguese la *sexta mayor*, que procediendo sus vibraciones en la razon de 5. à 3. concurre la tercera vibracion de la cuerda grave, con la quinta de la aguda; y por consiguiente, tiene seis vibraciones desordenadas, dos de la grave, y quatro de la aguda; y teniendo la quarta solas cinco desordenadas, se sigue ser menos perfecta la sexta mayor que la quarta.

Despues de la sexta mayor entre los intervalos simples, juzgo ser mas perfecta la *tercera mayor*, ò *ditono*, cuyas vibraciones guardan la razon de 5. con 4. concurriendo cada quarta vibracion de la cuerda grave con la quinta de la aguda: luego tiene siete vibraciones desordenadas, tres de la cuerda grave, y quatro de la aguda; y por consiguiente ha de ser menos perfecta que la sexta mayor.

Si-

Siguese la *tercera menor*, ò *semiditono*, cuyas vibraciones tienen la razon de 6. à 5. y concurren la quinta de la grave con la sexta de la aguda; luego tiene nueve vibraciones desordenadas, quatro de la grave, y cinco de la aguda; y por consiguiente es menos perfecta que la tercera mayor.

Ultimamente, la *sexta menor* procede en la razon de 8. con 5. y concurre la quinta vibracion de la cuerda grave con la octava de la aguda: de que se sigue tener once vibraciones desordenadas, quatro de la grave, y siete de la aguda: luego es menos perfecta que la tercera menor, segun la regla.

Aqui se vè que los intervalos referidos, son conocidos por consonancias (aunque los practicos modernos excluyen la quarta) y todos vàn descaeciendo de su perfeccion al passo que tienen mas vibraciones desordenadas, y desconcertados apulsos, tardando mas ajustarles, y vnirles; pero aun en el vltimo de ellos, que es la sexta menor, no es tanta essa tardança, que llegue à hazerle disonante, como lo son los ocho intervalos siguientes.

Despues de la sexta menor, que consiste en la razon de 8. à 5. se sigue la *septima menor*, cuyas vibraciones guardan la razon de 9. à 5. con que solamente concurre la quinta vibracion de la cuerda grave con la nona de la aguda; y por consiguiente ay doze vibraciones desordenadas, quatro de la grave, y ocho de la aguda; y siendo ciertamente disonante, lo seràn tambien todos los intervalos siguientes, excediendose en razon de disonantes, segun el orden, con que los voy refiriendo.

El *tono mayor*, consiste en la razon de 9. à 8. con que tiene 15. vibraciones desordenadas, 7. de la cuerda grave, y 8. de la aguda. El *tono menor*, 10. à 9. tiene 17. desordenadas, 8. de la grave, y 9. de la aguda. La *septima mayor* 15. à 8. tiene 21. vibraciones desordenadas, 7. de la grave, y 14. de la aguda. El *semitono mayor* 16. à 15. tiene 29. desordenadas, 14. de la cuerda grave, y 15. de la aguda. El *semitono menor*, 25. à 24. tiene 47. vibraciones desordenadas, 23. de la cuerda grave, y 24. de la aguda. El *tritono*, de 45. à 32. tiene 75. desordenadas, 31. de la grave,

y 44. de la aguda. Ultimamente la *quinta remisa*, 64. à 45. tiene 107. vibraciones desordenadas, 44. de la cuerda grave, y 63. de la aguda: todo lo qual confirma la experiencia, que entre las disonancias reconoce por menos desapacible à la septima menor, y por mas desabrida à la quinta remisa.

ESCHOLIO.

No siendo facil que la voz se acomode à todos quantos son los intervalos en que se puede partir la octava por ser infinitos, solo vsan los practicos de los 16. referidos, ocho consonos, y ocho disonos, por ser ellos bastantes para las composiciones harmonicas; pero sin embargo no se puede dudar que ay otros dos intervalos consonos, el vno de los quales consiste en la razon de 7. à 4. y el otro en la de 7. à 5. que segun la regla dada, han de ser tanto mas perfectos que la sexta menor 8. à 5. quanto menos tienen de apulsos desordenados; y quanto los concursos de las vozes grave, y aguda son mas frequentes, y repetidos. Solo puede dudarse de vn otro intervalo, que consiste en la razon de 7. à 6. por mediar entre la sexta menor 8. à 5. vltima de las consonancias arriba dichas, y la septima menor 9. à 5. primera de las disonancias; y es el intervalo mayor de los dos que nazen si se divide con vn medio harmonico la quarta, ò razon de 4. à 3. El P. Honorato Fabry assegura ser este intervalo consonante, y que de ninguna manera es desapacible al oìdo: à mi no me pareciò mal quando hize la experiencia en el Tetrachordo; à otros no parece tan bien; apelo al gusto de cada vno, que en estas materias suele ser el arbitro.

PROP. XXII. Theorema.

Los intervalos compuestos en quanto à la consonancia, ò disonancia, no se distinguen substancialmente de los simples, de quienes se componen.

La verdad de esta Proposicion se manifiesta en la experiencia; porque al oìdo parecen semejantes; y assi la dezena 5. à 2. que es tercera mayor sobre octava, es parecida à la tercera simple 5. à 4. de que se compone: la onzena 8. à 3. que es quarta sobre octava, semeja à la quarta 4. à 3. la dozena 3. à 1. que es quinta sobre octava,

es ſemejante à la quinta 3. à 2. la novena 9. à 4. que es ſegunda ſobre octava ; es ſemejante à la ſegunda 9. à 8. y aſsi de las demàs ; y aun por eſſo los practicos llaman tambien à los intervalos compueſtos con los miſmos nombres que à los intervalos ſimples : à la novena llaman *ſegunda* ; à la dezena, *tercera*; à la dozena, *quinta*, &c.

La razon de eſta ſemejanza es, porque la dupla, en que exceden los intervalos compueſtos à los ſimples, no altera en el tympano del oìdo los apulſos, que harian las vozes grave, y aguda en los intervalos ſimples; antes bien les incluye, y executa vniformemente ſin mas diferencia que el duplicarſes. Sirva de exemplo la quinzena 4. à 1. en la qual, mientras la voz grave haze vna vibracion, la aguda haze 4. que por ſer iguales en la duracion, es preciſo que la primera de la aguda, concurra con la quarta parte de la grave; la ſegunda con la mitad, la tercera con los tres quartos, y la quarta acabe de conmenſurarſe con toda; y ſiendo cierto que en la dupla 2. à 1. que es el exceſſo de la quinzena à la octava, mientras la voz grave haze vna vibracion, la aguda haze dos, correſpondiendo vna à la mitad, y otra ajuſtandoſe con toda ella, ſigueſe que la quinzena contiene vniformemente las miſmas dos vibraciones que tuviera la octava ſencilla, ſin mas diferencia que el duplicarlas, añadiendo otras dos intermedias que correſponden à las quatro partes de la vibracion grave.

Lo miſmo ſucede en otro qualquier intervalo compueſto; como la onzena 8. à 3. que ſe compone de la quarta 4. à 3. ſobre octava, contiene las miſmas quatro vibraciones vniformemente, que tiene la quarta ſimple 4. à 3. ſin mas diferencia que doblarlas, añadiendo la voz aguda otras quatro intermedias, para correſponder à las ocho partes, en que ſe conſideran divididas las tres vibraciones de la grave. La novena 18. à 8. contiene las miſmas nueve vibraciones, que forma la cuerda aguda en la ſegunda ſimple 9. à 8. añadiendo ſolamente otras nueve intermedias, para ajuſtarſe, y correſponder a lás 18. partes en que ſe conſideran divididas las 8. vibraciones de la cuer-

cuerda grave, &c. Incluyendo, pues, los intervalos compuestos las mismas vibraciones que los simples, hieren igualmente el tympano del oìdo; y asi, no es mucho que este les perciba semejantes.

Ni puede destruir esta semejança la duplicacion de las vibraciones, y apulsos, antes bien la confirma maravillosamente, porque constando cada vibracion de la cuerda grave de dos movimientos iguales: esto es, el vno con que và, y el otro con que buelve; y correspondiendo las vibraciones de la cuerda aguda à entrambos con igualdad, es preciso que el sonido de las vibraciones simples no se altere substancialmente con añadir las intermedias, pues si algunas de ellas aceleran el primer movimiento de la ida, ajustandose à èl; otras tantas retardan el segundo de la buelta oponiendosele; y quando llega à percibirse el sòn, està el tympano del oìdo en la misma disposicion, que si solo concurriessen las vibraciones simples; y asi le percibe totalmente semejante.

Dixe, que no se distinguen los intervalos compuestos de los simples substancialmente; porque aunque conservan el mismo genero de consonancia, ò disonancia, todavia, cada vno en su genero, adquiere mayor, ò menor perfeccion, ò imperfeccion, respecto de los intervalos simples de que se componen, segun que la duplicacion de las vibraciones en la cuerda aguda, hiziere mas repetido el concurso con las de la grave; porque comprehendiendo, y executando los intervalos compuestos, como se ha dicho, las mismas vibraciones, y apulsos que sus simples, siguen la regla general, que para ellos dimos en la Propos. anteced. Y asi por la razon alli dicha, son mas suaves que sus intervalos simples la dozena 3. à 1. y la dezena mayor 5. à 2. y menos suaves que sus simples la quincena 4. à 1. la oncena 8. à 3. la decena menor 12. à 5. la sexta mayor compuesta 10. à 3. y la menor 16. à 5. como lo confirma la experiencia.

Lo mismo digo de las disonancias, que son menos disonantes que los intervalos simples, de que se componen; la novena mayor 9. à 4. la septima mayor compuesta 15. à

4.

4. el ſemitono menor compueſto 25. à 12. el tritono 45. à 16. y mas diſonantes; la novena menor 20. à 9. la ſeptima menor 18. à 5. el ſemitono mayor 32. à 15. y el ſemidiapente 128. à 45. Eſto miſmo que ſe ha dicho de los intervalos compueſtos de vna octava, ſe debe dezir de los compueſtos de dos, ù de tres, &c. que adquieren cada vno en ſu genero, ò pierden de ſuavidad, ſegun mas preſto, ò mas tarde concurrieren las vibraciones de la voz aguda con las de la grave; pero como por mas que ſuavizen, ò pierdan de la perfeccion jamàs ſe pueden extraer de ſu genero, por llevar ſiempre conſigo el ſonido de las ſimples, por eſta cauſa la dozena 3. à 1. jamàs llega à la perfeccion de la quinzena 4. à 1. la novena, diez y ſeiſena, &c. 9. à 4. 9. a 2. 9. a 1. jamàs dexan de ſer diſonantes, aunque ſus vibraciones concurran mas apriſa que en la ſexta, y tercera menor.

COROLARIO.

DE lo dicho ſe infiere averſe de dezir lo miſmo de los otros intervalos compueſtos, à que no atienden los practicos, como ſon el de 7. à 3. que es el intervalo 7. à 6. ſobre octava, el qual no llega à la perfeccion de la tercera menor. El de 7. à 2. que es el intervalo 7. à 4. ſobre octava; y el de 7. à 1. que es el miſmo 7. à 4. ſobre dos octavas, los quales aunque exceden en ſu conſonancia à la tercera, y ſexta menores, no llegan à la de la tercera mayor 5. à 4. y mucho menos à la veinte y doſena 8. à 1. por obſervar en razon de conſonancia, y diſono la miſma diferencia ſubſtancial que tienen los ſimples de que ſe componen, como inſinuè en el Eſcholio de la Propoſ. antecedente.

ESCHOLIO.

NO tienen que eſtrañar los practicos que ponga yo à la quarta en el numero de las conſonancias, porque eſto miſmo han juzgado con ſentir vnanime los Muſicos mas peritos, como lo aſſegura el P. Atanaſio Kirker en ſu Muſurgia, tom. 1. lib. 6. cap. 2. Theorema 3. y Cerone lib. 2. cap. 74. y como puede dexar de ſerlo? porque ſi la quinta, no ſiendo tan perfecta como la octava ſe divide en dos intervalos harmonicos conſonantes, quales ſon las terceras mayor, y menor, quanto mas ſeràn conſonantes los dos intervalos bar-

harmonicos quinta, y quarta, en que se divide la octava: à mas, que ella misma por sì sola soborna bastantemente con su suavidad al oido, para que sentencie en favor suyo; y lo que nadie puede dudar es, que puesta sobre la quinta, produce la mas suave, y perfecta consonancia de quantas se conocen; y puesta baxo los terceras, perficiona las consonancias tercera, y sexta.

Pero aunque los practicos no deban estrañar este sentir, ni yo tampoco debo estrañar el suyo; porque si bien es verdad que la quarta es consonancia, no es tan aplicable à las composiciones harmonicas como las terceras, y sextas, ni tiene fuera de las dichas dos posturas, otra que no necessite, para que parezca bien, de cubrirla, ligarla, sincoparla, ò darla alguna buena entrada, y salida; y assi, en quanto à la practica, es como si fuera disonancia.

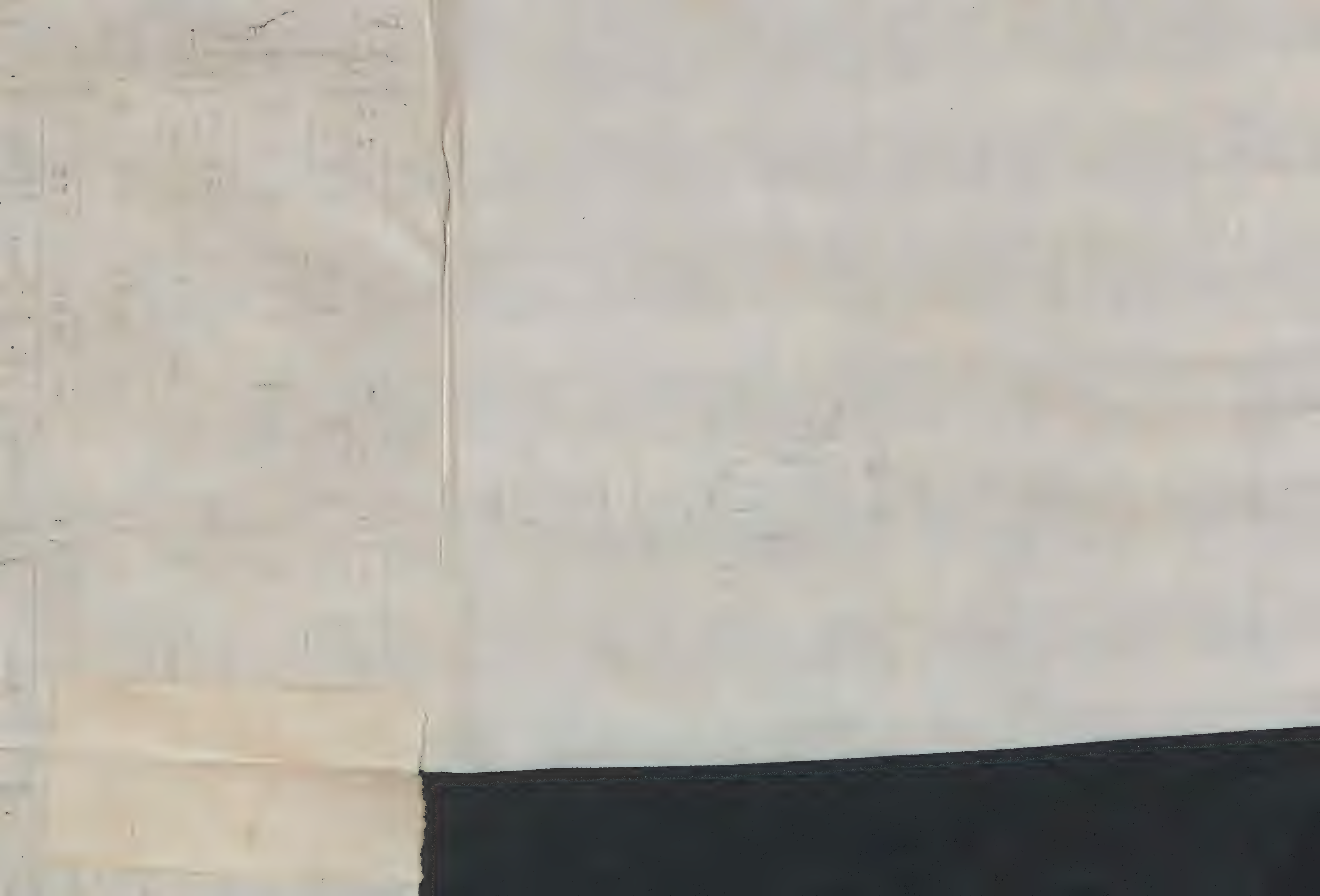
La causa de esto, y de tener tan pocos usos la quarta, no naze de imperfeccion suya; si de no averse dividido en sus intervalos harmonicos, como se ha dividido la octava en quinta, y quarta; y la quinta en tercera mayor, y menor; la tercera mayor, en tono mayor, y menor; porque si la quarta 8. à 6. se dividiesse harmonicamente en sus dos partes, la una 7. à 6. (que es consonante, aunque no tanto como la tercera menor 6. à 5.) y la otra 8. à 7. que es disonante; aunque no tanto como el tono mayor 9. à 8. quantas reglas ay de composicion en orden à la quinta, y mixtion de las terceras de quienes se compone, se podrian aplicar proporcionalmente à la quarta, y su mixtion con dichos dos intervalos; resultando de aì otra nueva harmonia sonora, à que el oìdo no està acostumbrado.



TABLA 2.

Del Systema musico de los Antiguos segun los Generos

Diatonico			Chromatico			Enharmonico	
15		esta	15		ble	15	
	Tono			semidi			ditono
14		movi					
	Tono		14	sem	ble	14	diesis
13			13		tra	13	
	sem	esta		sem	ble		diesis
12			12			12	
	Tono			semidi.			ditono
11		movi					
	Tono		11	sem	ble	11	diesis
10		neu	10		tra	10	
	Sem.	esta		sem	ble		diesis
9			9			9	
	Tono			Tono			Tono
		esta	8		ble	8	
	Tono			Semiditono			Ditono
7		movi					
	Tono		7	sem	ble	7	diesis
6		neu	6		tra	6	
	Sem.	esta		sem	ble		diesis
5			5			5	
	Tono			Semiditono			Ditono
4		movi					
	Tono		4	semit.	ble	4	diesis
3		neu	3		tra	3	
	Semi.	esta		semit.	ble		diesis
2			2			2	
	Tono			Tono			Tono
1		esta	1		ble	1	



LIBRO II.

DEL SYSTEMA MUSICO, segun los Generos Diatonico, Cromatico, Enharmonico; Diatonico-cromatico, y Diatonico-cromatico-enharmonico.

DEFINICIONES.

1. SYstema Musico, es vna recta ordenacion, y disposicion de las cuerdas, ò vozes vsadas en la Musica: à esta llaman los Griegos, *Systema*; los Latinos, *Escala*, ò *Mano musica*, como se verà despues. Componian los Griegos el Systema de Tetrachordos.

2. *Tetrachordo*, ò *Quadrichordo*, es vna ordenacion, ò disposicion de quatro cuerdas, ò vozes, tales, que la mas grave, con la mas aguda, forman vn diatesaron, ò quarta: con las cuerdas que estàn entre la mas grave, y mas aguda, se formaban otros intervalos menores, que llenaban el Tetrachordo, ò quarta; y à esta disposicion de los intervalos menores, que componen vn Tetrachordo, llamaron, *Genero musico*; con que

3. *Genero musico*, es la disposicion de vnos intervalos, que sumados, hazen el Tetrachordo, ò diatesaron; y porque estos intervalos no eran siempre los mismos, por esta causa fueron diferentes los generos de la Musica; es à saber, *Diatonico*, *Cromatico*, y *Enharmonico*.

4. Ge-

4. *Genero Diatonico*, es el que procede por dos tonos, y vn semitono, con que el Tetrachordo en este genero se componia de dos tonos, y vn semitono.

5. *Genero Cromatico*, es el que procede por dos semitonos, y vna tercera menor, ò semiditono; y de estos intervalos se componia su Tetrachordo.

6. *Genero Enharmonico*, es el que procede por dos diesis, y vna tercera mayor, ò ditono; y estos eran los intervalos que formaban su Tetrachordo.

7. Los modernos, adelantando, y perficionando la Musica, mezclaron en sus Systemas los sobredichos generos, de que se originaron el Genero *Diatonico-Cromatico*, y el *Diatonico Cromatico-Enharmonico*: aquel es mixto del *Diatonico, y Cromatico*; y este lo es de los tres *Diatonico, Cromatico, y Enharmonico*. De todo esto se tratarà aora en particular.

CAPITULO I.

DEL SYSTEMA MUSICO, SEGUN LOS tres Generos Diatonico, Cromatico, y Enharmonico.

PROP. I. Theorema.

Explicanse algunos intervalos de los antiguos algo diferentes de los nuestros.

PAra que el lector no se confunda, si acaso leyendo los Autores antiguos, viere que señalan la cantidad, y proporcion de algunos intervalos, diferente de la que arriba hemos establecido, me ha parecido explicar con pocas palabras la diversidad que en esta parte avia de los antiguos a los modernos.

Digo, pues, que los Musicos antiguos no conocieron el tono menor, o sesquinono, si tan solamente el mayor, ò sesquioctavo. A este, pues, dividian en dos semitonos, vno mayor, y otro menor: al mayor llamaban, *Apotome*, y estaba en

en la razon de 17. à 16. Al menor llamaban *Diesi*; y estaba en la razon de 18. à 17. y los dos hazian justamente el tono sesquioctavo; porque si se suma la razon de 18. à 17. con la de 17. à 16. sale la razon sesquioctava.

De aqui se infiere, que componian la Tercera mayor de dos tonos mayores; con que estaba en la razon de 81. à 64. y porque ninguno de los semitonos sobredichos, añadido à los dos tonos, ò Tercera mayor, podia componer el Diatesaron, el qual, à mas de dos tonos, incluye vn semitono, restaban el Ditono sobredicho, ò razon de 81. à 64. de vn Diatesaron; esto es, de la razon de 4. à 3. y salia por residuo otro semitono mas pequeño, que qualquiera de los sobredichos, al qual llamaron *Leimma*, y estaba en la razon de 256. à 243. que proximamente es la razon de 19. à 18.

A màs de esto, à la diferencia del semitono mayor, y menor, que componian el tono mayor, llamaron algunos *Coma*; pensando, ò suponiendo, como aora suponen los Practicos, que el tono se compone de nueve Comas, de las quales competian cinco al semitono mayor, y quatro al menor; donde se vè tenian los semitonos siguientes.

Semitono mayor, ò Apotome.	17. à 16.
Semitono menor, ò Diesi.	18. à 17.
Semitono minimo, ò Leimma.	19. à 18.

Tambien dividian al semitono menor en dos partes, que llamaban *Diaschismas*, y à la Coma en otras dos partes, segun Philolao, que llamaban *Schismas*; pero de esto no ay que hazer caso, por ser de ninguna importancia.

Los Musicos modernos llegaron à conocer dos tonos, vno mayor, que es el sesquioctavo de 9. à 8. y otro menor, que es el sesquinono de 10. à 9. como dixe en Libro passado, con lo qual determinaron los intervalos con mayor acierto. Un tono mayor, y otro menor hazen la Tercera mayor perfecta, con numeros mas harmonicos, y es como 5. con 4. Tambien restando la Tercera mayor de la Quarta, tuvieron el semitono mayor de 16. a 15. y aviendole hallado la Tercera menor por la division harmonica del Diapente,

pente la restan de la Tercera mayor, y sale el semitono menor, proprio del orden Cromatico, como despues se verà, y consiste en la razon de 25. à 24. y se señala con dos x medio sobrepuestas, como se vè en la figura 7. Restando el semitono menor del mayor, sale la verdadera Diesi harmonica en la razon de 128. à 125. que se señala con x sencilla; y conservando el semitono menor con nombre de *Diesi mayor*, llaman à la Diesi harmonica, *Diesi mayor*; y vltimamente restando el tono menor del mayor, sale la *Coma*, en razon de 81. à 80. Me ha parecido explicar esto, para que con mayor facilidad se entiendan los Autores.

PROP. II. Theorema.

Explicase la composicion del Tetrachordo en cada vno de los tres Generos, Diatonico, Cromatico, y Enbarmonico.

JUzgaron siempre los Musicos por conveniente componer el Systema de Tetrachordos, ò Quartas; de suerte, que colocando vnas sobre otras, formassen vna como escala, por la qual subiesse, y baxasse harmonicamente la voz; yà levantandose de lo grave à lo agudo; yà deprimiendose de lo agudo àzia lo grave. La razon de conveniencia consiste, en que quien sabe entonar continuadamente los intervalos de vn Tetrachordo, ò Quarta, sabe entonar todo el Systema.

En cada Tetrachordo ay tres intervalos, que requieren quatro vozes, ò cuerdas, que le dàn la denominacion de *Tetrachordo*. Estos intervalos no son en todo caso los mismos, porque aunque el Tetrachordo sea el mismo, por conservar siempre la cuerda inferior con la superior la razon de 4. con 3. pero el modo de llenar esta consonancia con los intervalos menores fue antiguamente de tres maneras, y de aqui resultaron los tres Generos *Diatonico, Cromatico, y Enbarmonico.*

El Genero Diatonico compone su Tetrachordo de vn semitono mayor 16. à 15. de vn tono mayor 9. à 8. y de vn tono menor 10. à 9. Juzgo que tomò la denominacion de *Dia-*

Diatonico, por proceder por tonos, y semitonos: llamase tambien *Natural*, por ser el que se forma entonando las vozes, *vt, re, mi, fa, sol, la, &c.*

El *Genero Cromatico*, compone su Tetrachordo de vn semitono mayor 16. à 15. de vn semitono menor 25. à 24. y de vn semiditono, ò tercera menor 6. à 5. llamase *Cromatico*, por expressar, y notar los Antiguos sus cuerdas con diferente color.

El *Genero Enharmonico*, compone su Tetrachordo de vna Diesi mayor, ò semitono menor 25. à 24. y vna Diesi menor, ò harmonica 128. à 125. y de vna Tercera mayor 5. à 4. Todo lo dicho se vè claramente en la siguiente Tabla.

TABLA
De vn Tetrachordo compuesto, segun cada genero.

Genero Diatonico.	
Tono menor.	10. à 9.
Tono mayor.	9. à 8.
Semitono mayor.	16. à 15.
Genero Cromatico.	
Semiditono.	6. à 5.
Semitono menor.	25. à 24.
Semitono mayor.	16. à 15.
Genero Enharmonico.	
Ditono.	5. à 4.
Diesi menor.	128. à 125.
Diesi mayor.	25. à 24.

PROP. III. Theorema.

Explicase el Systema musico de los Antiguos en los tres generos.

DE lo dicho en la Propos. antecedente se colige, que los tres generos de la Musica, solo se diferenciaban en los intervalos menores, que llenan el Tetrachordo, ò Quarta. De estos Tetrachordos componian los Griegos su Systema en cada genero, poniendo en cada vno igual numero de Tetrachordos proprios de aquel genero; de que

se sigue, que los tres Systemas Diatonico, Cromatico, y Enharmonico, constaban de vn mismo numero de cuerdas, y de vn mismo numero de intervalos; convenian tambien en la cantidad de los intervalos mayores, porque las Octavas, Quintas, y Quartas tenian siempre su debida cantidad; y solo se diferenciaban en la de los intervalos menores, que llenaban las Quartas.

Juzgando, pues, por conveniente, que el Systema constasse de dos Diapasones, le compusieron de quatro Tetrachordos; de tal suerte, que los inferiores tuvieran vna cuerda comun: esto es, que la cuerda del primero, fuesse la primera del segundo; y asimismo, la vltima del tercero, fuesse la primera del quarto, pero la vltima del segundo, y primera del tercero eran diferentes, y distaba la vna de la otra vn tono entero; lo qual hazian para llegar à perficionar los dos Diapasones; y como aun con esto no estaban completos, por faltar vn tono, añadieron debaxo del infimo Tetrachordo, vna otra cuerda, à que llamaron *Proslambanomenon*, la qual distaba de la cuerda mas grave del infimo Tetrachordo, vn tono entero; y con esto quedò perficionado el Systema, compuesto de quinze cuerdas.

De los quatro Tetrachordos, que componian el Systema, el infimo se llamaba, *Tetrachordo hypaton*; esto es, *Tetrachordo de las cuerdas principales*; al siguiente llamaban, *Tetrachordo meson*: esto es, *de las cuerdas medias*: al tercero llamaban: *Tetrachordo diezeugmenon*; esto es, *de las cuerdat disiuntas, ò separadas*; porque como dixe, este Tetrachordo estaba separado del segundo, en distancia de vn tono: al quarto, y vltimo Tetrachordo, llamaban: *Tetrachordo hyperboleon*; esto es, *de las cuerdas mas altas, y agudas.*

Los nombres de las cuerdas, que componian los Tetrachordos, son los siguientes: la infima del infimo Tetrachordo, se llama, *Hypate, hypaton*: la siguiente subiendo, *Parhypate hypaton*: la tercera, *Lychanòs hypaton*: la quarta, que juntamente es primera del siguiente Tetrachordo, *Hypate meson*: la segunda, *Parhypate meson*: la tercera, *Lychanos meson*: la quarta, *Mese*: esto es, *Media*. En el tercero Tetrachordo a la primera llamaban, *Paramese*: à la segunda, *Trite*

diezeugmenon: à la tercera, *Paranete diezeugmenon*: la quarta, que tambien era primera del quarto Tetrachordo, se llamaba, *Nete diezeugmenon* : la segunda, *Trite hyperboleon* : la tercera, *Paranete hyperboleon* : la quarta, *Nete hyperboleon*. No me detengo en la explicacion de estos nombres por ser de poca importancia: veasse la Tabla primera.

Advirtiendo yà los antiguos en este Systema, singularmente en el del orden Diatonico, vn defecto; y es, que segun la disposicion explicada, todo el Systema Diatonico, procede por dos tonos, y vn semitono; solamente à la mitad del Systema, se hallan tres tonos, y vn semitono, por el tono añadido entre el segundo, y tercero Tetrachordo: de que se sigue, que si la composicion de alguna tonada requiere despues de dos tonos vn semitono, sea preciso para cantarla con acompañamiento de Organo, ò semejante instrumento de vozes fixas, huir del medio del Systema, incomodando mucho las vozes humanas, obligandolas à cantar muy alto, ò baxo.

Para evitar, pues, este inconveniente, dividieron al tono que separa el segundo del tercero Tetrachordo, en dos semitonos, con que vinieron como à ingerir vn otro Tetrachordo, añadiendo solamente vna cuerda entre la cuerda *Mese*, que es la vltima del Tetrachordo *Meson*; y la cuerda *Paramese*, que es la primera del Tetrachordo *Diezeugmenon*: de suerte, que desde la cuerda *Mese*, hasta la cuerda *Paranete diezeugmenon*, ay vn Tetrachordo, à que llamaron, *Synemmenon* : esto es, *añadido*, ò *adaptado*. Su cuerda primera en la parte grave, es la misma llamada *Mese*, que es la vltima del Tetrachordo *Meson* : siguese en distancia de vn semitono la cuerda añadida, à que llamaron, *Trite synemmenon* : siguese en distancia de vn tono la cuerda, *Trite diezeugmenon*, que en quanto constituye el Tetrachordo *Synemmenon*, se llama, *Paranete synemmenon* : siguese en distancia de otro tono la cuerda *Paranete diezeugmenon*, que en quanto compone el Tetrachordo *Synemmenon*, se llama, *Nete synemmenon*. Con esto queda remediado de dicho inconveniente, y perficionado el Systema.

Todo esto se vè claramente en la Tabla 1. en la qual

para mas claridad se pone solamente el Systema del orden Diatonico. Siguese despues la Tabla 2. en quien estan los Systemas de los tres Generos, y en ella se vè, que algunas cuerdas llamadas *Fixas*, son comunes à todos los tres Generos: otras llamadas *Movibles*, son diferentes en cada Genero; y otras, que se llaman *Neutras*, son comunes à dos Generos. Omitese la cuerda entre Mese, y Paramese por no confundir, y estàr bastantemente expressada en la Tabla 1.

PROP. IV. Thoerema.

Explicase el Systema de Guido Aretino en el Genero Diatonico.

NO dexaba de causar gran dificultad el Systema Griego por la multitud de cuerdas, y diversidad de nombres que tenia; procuraronle facilitar los Latinos; y assi desde el tiempo de Boethio, San Ambrosio, San Agustin, y San Gregorio Magno trabajaron mucho en ello, hasta que Guido Aretino, Monge Benito, por los años del Señor 1024. dispuso el Systema Musico tan facil, y acomodado à la practica, que la recibiò toda la Europa, y se vsa hasta el dia de oy: si bien mejorado en algunas circunstancias.

Compuso, pues, Guido Aretino su Systema de 22. cuerdas; y en lugar de los Tetrachordos antiguos, puso siete Hexachordos, los quales eran semejantes entre si: esto es, tenian todos al semitono mayor en vn mismo lugar, que es en medio de los quatro tonos. Tambien se ha de advertir, que estos Hexachordos eran comunicantes; de suerte, que no se seguian vno despues de otro, como se seguian los quatro Tetrachordos de los Griegos (3.) si que tenian algunas cuerdas comunes el vno con el otro. Las vozes, que sirven para entonar qualquiera de los dichos Hexachordos, son, *vt*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*: tomados del Tristico primero del Hymno de S. Juan Bautista.

VT queant laxis REsonare fibris
MIra gestorum FAmuli tuorum;
SOLve polluti LAbij reatum,
Sancte Ioannes.

Para

TABLA I.

Del Monochordo Syntono, ò Diatonico natural.

Tetrachordo	Cuerda	Num.	Intervalo	Tetrachordo Synemmenon	Intervalo
(Tetrach. Hyperbol.)	Nete hyperboleon	16			
	Paranete hyperbol.	15	Tono.		
	Trite hyperboleon	14	Tono.		
(Tetrach. Hyperbol.) / (Tetrach. Diezeugmen.)	Nete Diezeugmenon	13	Semit.		
(Tetrach. Diezeugmen.)	Paranete Diezeug.	12	Tono.	Nete Synemmenon.	
	Trite Diezeugmenon	11	Tono.	Paranete Synemmen.	
	Paramese	10	Semit.		
		9	Semit.	Trite Synemmenon.	Tono.
(Tetrach. Meson.)	Mese	8	Semit.	Mese.	
	Lychanos meson	7	Tono.		
	Pathypate meson	6	Tono.		
(Tetrach. Meson.) / (Tetrach. Hypaton.)	Hypate meson	5	Semit.		
(Tetrach. Hypaton.)	Lychanos hypaton	4	Tono.		
	Parhypate hypaton	3	Tono.		
	Hypate hypaton	2	Semit.		
	Proslambanomenon	1	Tono.		

Tetrachordo Synemmenon.



Para nombrar las cuerdas, dexando los nombres Griegos antiguos, tomò ſiete letras del Abecedario, que ſon A, B, C, D, E, F, G; y como los Hexachordos ſean comunicantes, ſe ſigue, que en muchas cuerdas han de caer diferentes vozes, yà de dos, yà de tres Hexachordos; con que viene à nombrarſe la cuerda con la letra, y vozes que le correſponden, formando de todo vn nombre; y eſto es lo que los practicos llaman *Signos*.

Tambien ſiendo las cuerdas del Syſtema 22. y las letras ſiete, fue neceſſario repetirlas tres vezes; y para mayor diſtincion, las ſiete primeras en la parte grave las pintò mayuſculas A, B, C, &c. las ſiete ſiguientes minuſculas, a, b, c, &c. y las otras ſiete minuſculas duplicadas aa, bb, cc, &c.

Quiſo tambien Guido Aretino, que ſupueſto los intervalos de cuerda à cuerda eran los miſmos que los del Syſtema de los Antiguos, la cuerda A, que era la mas grave, correſpondieſſe à la cuerda *Proslambanomenon*; la ſiguiente B, à *Hypate hypaton*, C, à *Parhypate hypaton*; y aſsi en las demàs, como ſe vè en la Tabla 3. Pero viendo que de A, à B, ay vn tono, como de *Proslambanomenon* à *Hypate hypaton*, y deſpues ſe ſigue el ſemitono, juzgò por conveniente añadir antes de A, vna otra cuerda, à quien los Griegos llamarian *Hypoproslambanomenon*; y en conſequencia de los nombres de las otras, quiſo ſe llamaſe G, ò *Gamma*; y de eſta ſuerte, cantando por el Genero Diatonico, que es el mas ordinario, ſe hallaſſen dos tonos antes del primer ſemitono.

A mas de eſto diſpuſo, que el principio de los Hexachordos, ſubiendo eſtavieſſe en las cuerdas G, C, F; con que la primera cuerda era G vt; ſegunda A re; tercera B mi; quarta C fa vt; quinta D ſol re; ſexta E la mi; ſeptima F fa vt; luego ſe buelven à repetir los miſmos nombres; G ſol re vt: A la mi re, &c. como ſe vè en la Tabla 3. repitiendoles tres vezes. De eſtas cuerdas, ò Signos, los ſiete primeros ſe llaman *Graves*; los ſiete ſiguientes, *Agudos*; y los otros, *Sobreagudos*. Veaſe la Tabla 3. que declara todo el Syſtema Diatonico, que es el que vnicamente queda de los

antiguos, y solo tiene vna cuerda del Cromatico, como se verà en la Prop. siguiente.

PROP. V. Theorema.

Explicanse las propriedades que ay en dicho Systema.

COmo todos los Hexachordos que componen este Systema tengan su principio, ò en G, ò en C, ò en F, se sigue averse de distinguir tres especies de Hexachordos, à los quales llaman *Propriedades*; y son *B quadrado*, *Natura*, y *B mol*. Todos los Hexachordos que empiezan en G, son de B quadrado; todos los que en C, son de la propriedad de Natura; y todos los que en F, pertenecen à B mol; esta suele señalarse con vna b; y en faltando este señal se entiende pertenecer la composicion à la propriedad de B quadrado. Esta misma propriedad de B quadrado, se llama tambien de *B duro*, en oposicion de la de *B mol*; y es la razon, porque consistiendo la diferencia de estas dos propriedades en la division del tono que ay de B, à C, como luego verèmos, la de b quadrado vsa del dicho tono entero; y assi es algo mas aspera, y dura, que la de b mol, que vsa del dicho semitono: la de Natura es media entre las dos.

Como las tonadas que se cantan ordinariamente suban mas que vn Hexachordo, ò Sexta, es forzoso que en acabando vn Hexachordo, *vt*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, se tome otro; en lo qual se ha de observar esta regla, que de la propriedad de b quadrado, no se ha de passar à la de b mol, ni de esta à la de b quadrado, si no es en caso accidental que se note; y es la razon, porque se cantaria *mi*, en lugar de *fa*, y *fa*, en lugar de *mi*; con que se colocaria el semitono fuera de su lugar, lo que seria cosa muy desapacible; y assi de la propriedad de b quadrado, se passarà à la de Natura; y de esta à la de b quadrado, cantandose por b quadrado; y si se canta por b mol, se passarà de esta propriedad a la de Natura, bolviendo siempre que sea menester à la de b mol; y esto ora sea subiendo, ò baxando. De aqui naze la regla que comunmente dàn los Practicos; que cantando por

por b quadrado, se haze mutança de Hexachordos para subir en D la sol re; y A la mi re, diziendo, *re*; y para baxar, en E la mi; y A la mi re, diziendo, *la*; y cantando por b mol, se toma la mutança para subir en D la sol re; y G sol re vt, diziendo, *re*; y para baxar, en D la sol re; y A la mi re, diziendo, *la*.

Puede aqui ofrecerse vna duda; y es, que para perfeccion del Systema, parece no era menester la propriedad de b mol; porque con solas dos propriedades avria bastante; pues en acabando vn Hexachordo de G sol re vt, se passaria al otro de C sol fa vt; y en acabandose este, se tomaria el siguiente de G sol re vt, luego se podria cantar sin la propriedad de B mol.

A esto se satisface diziendo, fue necessario introducir la propriedad de b mol en el Systema, por la misma razon, y del mismo modo que se introduxo en el Systema antiguo el Tetrachordo *Synemmenon*, para la comodidad del cantar; porque si bien las vozes humanas cantando solas, sin instrumento que acompañe, puedan de qualquiera punto formar qualquiera Diapason; pero aviendose de ajustar al Organo, ò otro instrumento de vozes fixas, y permanentes, no podrian sin grave incomodidad formar qualquiera Diapason de qualquiera punto, sino se huviera puesto en el Systema la propriedad de b mol; y es la razon, porque procediendo el orden Diatonico alternativamente por dos tonos, vn semitono; y por tres tonos, y otro semitono; y siendo por suposicion la cuerda C sol fa vt, acomodada à las vozes humanas, se puede sin violencia alguna empezar de C sol fa vt, el Diapason, que tiene al principio dos tonos, y vn semitono; y despues tres tonos, y vn semitono, porque de C, à D, ay tono; de D, à E, tono, de E, à F, semitono; de F, a G, tono; de G, à A, tono; de A, à B mi, tono; y de B mi, à C, semitono; pero si se ofreciere cantar vn Diapason, que tuviesse al principio tres tonos, y vn semitono; y despues los dos tonos, y el semitono, no les podria cantar sobre el Organo, menos que subiendo à F fa vt, lo que es regularmente violento à la voz humana.

Esto, pues, se remedia con la propriedad de b mol,

porque dividiendo el tono que ay de A, à B, en dos ſemitonos, ſe halla el dicho Diapaſon, con ſolo empezar vn tono mas baxo que C; porque de B fa, a C, ay tono; de C, à D, tono, de D, à E, tono; de E, à F, ſemitono; de F, à G, tono; de G, à A, tono; y de A, à B fa, ſemitono; y eſto es lo que obligò à introducir la propriedad de B mol, la qual, ſolamente conſiſte en la diviſion del tono de A, à B, en dos ſemitonos, mediante la cuerda B fa, que correſponde à la cuerda *Triteſynemmenon* del Tetrachordo *Synemmenon* de los Antiguos, como ſe vè en la tabla 3.

PROP. VI. Problema,

Explicaſe el Pentagramma.

ACoſtumbraſe en la practica repreſentar las cuerdas del Syſtema, ò los Signos en cinco lineas paralelas, llamadas, *Pentagramma*, que ſon de las que regularmente ſe neceſsita para el canto; de tal ſuerte, que no ſolo las lineas, ſi tambien los eſpacios, que ay entre ellas, correſponden à las cuerdas ſobredichas, como ſi en la linea infima eſtuvieſſe E la mi, en el eſpacio ſiguiente eſtarà F fa vt; en la linea ſiguiente eſtarà G ſol re vt; en el eſpacio inmediato A la mi re; y aſsi de los demàs por ſu orden.

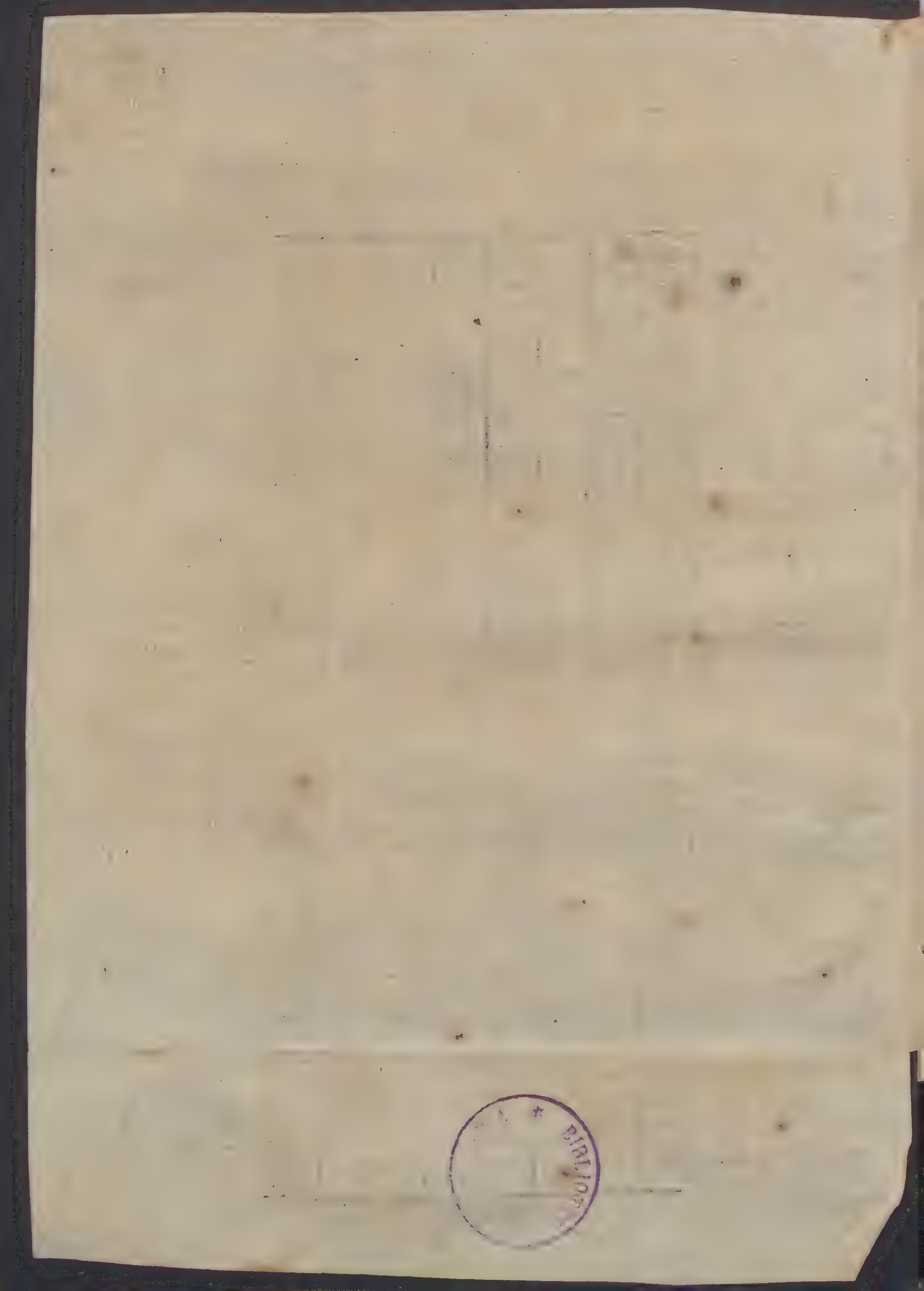
Para determinar à què ſigno correſponda cada linea, y eſpacio, baſta ſeñalar vna de las lineas, porque las demàs vàn correſpondiendo à los ſignos, que por ſu orden ſe ſiguen, aſsi ſubiendo, como baxando. El ſigno que eſtà alli expreſſado, ſe llama *Clave*, porque abre, y haze patente todo el ſignificado por aquellas lineas, y eſpacios. De los ſignos, pues, arriba explicados, ſolos tres han eſcogido para que ſirvan de clave; y ſon los que dàn principio à los Hexachordos, G ſol re vt; C ſol fa vt; y F fa vt. La clave de G ſol re vt, ſe pinta con vna G; la de C ſol fa vt, aſsi : y la de F fa vt, aſsi, , con que la linea notada con G, yà ſe ſabe ſer G ſol re vt; la notada con , C ſol fa vt; y la notada con : F fa vt; y eſtas manifieſtan las demàs;

co-

TABLA III.

Del Syſtema Guidoniano en el Genero Diatonico.

Tetracordo											
		ee							la		
		dd						la	ſol		
		cc					ſ	ſol	fa		
		bb							mi		
		bb						fa			
Tetrac. Hyperb.	Nete hyperbol.	aa					la	mi	re		
	Paranete hyperb.	g					ſol	re	vt		
	Trite hyperbol.	f					fa	vt			
Tetrac. diezeug.	Nete diezeugmen.	e				la	mi				
	Paranete diezeug.	d			la	ſol	re			Nete Synemen.	Tetracordo Synemenon.
	Trite diezeugmen.	c			ſol	fa	vt			Paranet. Synem.	
	Parameſe.	b				mi					
	Tono.	b			fa					Trite Synemen.	
Tetrac. Meſon.	Meſe.	a		la	mi	re				Meſe.	
	Lichanos Meſon.	G		ſol	re	vt					
	Parhypató Meſon.	F		fa	vt						
	Hypate Meſon.	E	la	mi							
Tetrac. Hypaton.	Lichanos hypaton.	D	ſol	re							
	Parhypate hypató.	C	fa	vt							
	Hypate hypaton.	B	mi								
	Prolambanomenó.	A	re								
	Hypoproslamban.	Γ	vt								



como se vè en los exemplos puestos en la figura 5.

En el exemplo 1. por estàr la clave G en la segunda linea de abaxo, se sabe que aquella linea es G sol re vt; y el espacio siguiente baxando es F fa vt; y la linea que se sigue es E la mi; y en el espacio sobre la clave esta A la mi, re; en la linea siguiente, B, fa, b, mi; en el espacio que se sigue, C sol fa vt; en la linea siguiente, D la sol re; en el espacio, E la mi; en la vltima linea F fa vt; y sobre ella, G sol re vt, &c. y de la propria suerte se conocerà en los demàs exemplos, què signos son los de cada linea, y espacio.

En este exemplo 1. por no hallarse al principio el señal b, proprio del b mol, se conoce averse de cantar por b quadrado; y en el segundo, por hallarse dicho señal en la linea perteneciente à B fa, b mi, se dà à entender averse de cantar por b mol; y aunque estas señales no estuviessen, se conoceria por las reglas generales del libro siguiente. Bolviendo, pues, al primer exemplo, el primer punto que se ha de cantar està en G, donde ay tres vozes, *sol*, *re*, *vt*, y porque el *vt*, es voz de B quadrado, escogerè esta, y no *re*, que es de b mol; ni el *sol*, porque aunque no seria error el tomarla; pero por subir el canto, es mejor tomar *vt*, que por esso enseñan los Practicos, que *vt*, *re*, *mi*, son para subir; y *fa*, *sol*, *la*, para baxar: Digo, pues, *vt*, en G; *re*, en A, *mi*, en B, *fa*, en C; en la siguiente linea, que es D, digo *re*, mudando de Hexachordo; (5.) en E, digo *mi*; en F, *fa*; en G, *sol*; y bolviendo à baxar en seguida de los puntos, digo en F, *fa*; en E, *la*, mudando de Hexachordo; y porque en D, no ay notado punto, no pronunciò el *sol*, que se avia de pronunciar, sì que passando adelante, digo en C, *fa*; y en B, *mi*; y en G, *vt*.

En el exemplo 2. por cantarse por b mol, y estàr el primer punto en F, digo *vt*; y prosiguiendo en G, digo *re*; en A, *mi*; en b, *fa*; en C, *sol*; en D, mudo de Hexachordo, y digo *re*; en E, digo *mi*; en F, *fa*; y en E, baxando, digo otra vez *mi*; en D, mudo de Hexachordo, y digo *la*, &c. y assi en los demàs exemplos.

PROP.

PROP. VII. Problema.

Disposicion del mismo Systema, segun los modernos.

ADvirtiendo los modernos, que el tomar las mutanças para passar de vn Hexachordo à otro, segun las reglas de la Propos. 6. causaba no poca dificultad à los principiantes, han procurado facilitar el Systema Guidoniano, disponiendole de suerte, que se evitasse el trabajo de mudar de Hexachordo; y viendo que la necessidad de dichas mutanças, nace vnicamente de estàr el Systema compuesto de Hexachordos, le compusieron de Heptachordos; añadiendo sobre las seis vozes ordinarias vna otra llamada, *Si*; y son todas, *vt*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*; con que son tantas como las letras A, B, C, D, E, F, G. De qualquiera voz à su inmediata ay tono, exceptùando del *mi* al *fa*, y del *si* al *vt*, que ay semitono.

Conservanse en esta disposicion, si bien se considera, las dos series, ò propriedades de B quadrado, y b mol, por hallarse en ella la division del tono que ay de A à B, en los dos semitonos, que es en lo que se diferencian estas dos propriedades, de las quales, la de b mol, es la que empieza su Heptachordo, diziendo *vt*, en F; y la de B quadrado, la que le empieza en C; con que no es menester la propriedad de Natura, ni es menester tampoco tomar mutanças, si que en acabandose vn Heptachordo, se empieza inmediatamente otro en la misma serie: de que se sigue, que cada cuerda, ò signo tiene dos vozes, la primera de b quadrado, y la segunda de b mol; de esta suerte G *sol re*: A *la mi*: B *si fa*: C *vt sol*: D *re la*: E *mi si*: F *fà vt*; como se vè con claridad en la Tabla siguiente.

Qui-

		b quadrado	b mol
	E	Mi	Si
	D	Re	La
	C	Vt	Sol
	B	Si	Fa
	A	La	Mi
G	G	Sol	Re
	F	Fa	Vt
	E	Mi	Si
	D	Re	La
	C	Vt	Sol
	B	Si	Fa
	A	La	Mi
G	G	Sol	Re
	F	Fa	Vt

Quizà le parecerà à alguno, que la propriedad que yo llamo de B quadrado en este Systema, es la que ordinariamente llaman de Natura, por deducir de C sus Heptachordos, de donde deduce sus Hexachordos esta propriedad en el Systema de Aretino; pero siendo esto meramente question de nombre, me ha parecido con el P. Milliet darle el de B quadrado, por quanto conserva entero el tono de A à B, que es el constitutivo de esta propriedad; aunque no deduzga sus Heptachordos de G, si de C.

Las claves son las mismas que expliquè en la Propos. antecedente, que puestas en el Pentagramma, declaran à què Signos corresponden las lineas, y espacios, como antes. Ponese tambien la b en la linea, ò espacio en que cae B si fa, para denotar si se ha de cantar por b mol; y en no aviendo dicho señal, se entiende averse de cantar por B quadrado; con esto se sabe què voz se ha de poner en el primer punto; y se continuaran las siguientes sin hazer mudanza, si que en acabandose vn Heptachordo se empeza-

rà

rà otro, poniendo *vt* despues de la voz *si*, subiendo; y *si* despues de la voz *vt*, baxando; como en los exemplos puestos en la fig. 6.

En el exemplo 1. sabemos por la clave, que la linea infima es C; y el señal b, significa hemos de tomar la serie B mol; y porque en cada Signo ay solas dos vozes, de las quales la primera es de B quadrado, y la segunda de B mol; estando el primer punto en C vt sol, dirè, *sol*; y los demàs consecutivamente, seràn *la, si, vt, re, mi, fa, sol, la*; y baxando del mas alto, que es *la*, dirè, *la, sol, fà, mi, vt, la, sol*; omitiendo los intermedios, si en ellos no huviere punto.

En el exemplo 2. por cantarse por B quadrado, serà *vt* el punto primero, que està en C vt sol; y dirèmos, *vt, re, mi, fa, sol, la, si, vt*, &c. Segun la disposicion de este Systema, qualquiera voz està en octava con la otra su semejante, que se sigue inmediatamente; como de *vt* à *vt*, ay octava, como de *re* à *re*, &c. Tiene gran conveniencia por evitar las mudanzas: solo tiene algo de dificultad, en que los principiantes han de aprender à entonar toda la octava; siendo assi, que en el Systema de Guido basta aprender vn Hexachordo; y en el antiguo, vn Tetrachordo.

CAPITULO II.

DEL SYSTEMA MUSICO, SEGUN LOS Generos Diatonico-Cromatico, y Diatonico-Cromatico-Enharmonico.

DE los Generos antiguos de la Musica, solo està en vso en nuestros tiempos el Genero Diatonico, cuyo Systema queda explicado en las Proposiciones antecedentes; pero aunque el Cromatico, y Enharmonico no se vsen, esto no obstante, juntamente con el Diatonico vsamos del Cromatico, mezclando algunas cuerdas de este con las de aquel, de que resulta vn genero de melodia

lodia mixto de Cromatico, y Diatonico. Y porque à mas de estas cuerdas, se pueden con acierto mezclar algunas del Genero Enharmonico, de que resultaria vn Genero mixto de los tres, por esta causa explico ambas mixturas en las dos Proposiciones siguientes.

PROP. VIII. Theorema.

Explicase el Systema musico Diatonico-Cromatico.

HAllase el Genero *Diatonico-Cromatico* en los Organos, Clavicymbalos, Espinetas, y Harpas de dos ordenes. Explicarèmos este Systema en el Teclado de los Organos, donde se vè con mayor claridad.

Hallanse en èl dos ordenes de Teclas, vnas blancas, y otras negras: En las blancas està sencillamente el orden Diatonico: Las negras que se interponen entre las blancas, pertenecen al orden Cromatico. De las Teclas negras ay vnas, que se llaman *Sustenidos*, y se notan en la fig. 7. con dos x medio sobrepuestas: Otras se llaman *Bmolados*, y se denotan con vna b. Los Sustenidos levantan la voz vn semitono menor, sobre su inmediata voz en la parte grave: los Bmolados deprimen la voz vn semitono menor, baxo su inmediata voz en la parte aguda; y assi la que levantò la voz vn semitono menor sobre G sol re vt, serà Sustenido de G sol re vt; y la que deprime la voz vn semitono menor debaxo de E la mi, serà el bmolado de E la mi; y como estos semitonos menores sean del orden *Cromatico* propriamente, por esta causa hallandose mezclados con las cuerdas, ò Teclas del Diatonico en nuestros Organos, Harpas, &c. dezimos se halla en ellos el orden *Diatonico-Cromatico*. Para entender esto con mayor claridad, veasе la figura 7. que representa el Teclado del Organo, que es el mismo que en los Clavicymbalos, Espinetas, &c.

El Teclado del Organo representa enteramente el Systema musico: El de los Griegos empezaba por la cuerda *Proslambanomenon*, que es nuestro *A la mi re*: el Systema de Guido empieza por *G sol re vt*; pero en los Organos tiene su principio en C sol fa vt; y assi la primera Tecla à la izquier-

quierda es C sol fa vt; la siguiente D la sol re; la tercera E la mi, &c. como està en la fig. 7. con que en solas las Teclas blancas està el orden Diatonico.

Las Teclas negras dividen cada tono en dos partes, con esta diferencia, que vnas estàn vn semitono menor mas altas que la Tecla blanca, que està à su lado en la parte grave; y otras estàn vn semitono menor mas baxas que la Tecla blanca que està à su lado en la parte aguda; y assi aquellas son *Sustenidos*; y estas *Bmoladas*. Las Teclas, ò cuerdas, que tienen substenido, son C sol fa vt; F fa vt; y G sol re vt; las que tienen bmolados, son E la mi; y B fa B mi; y assi en la octava de C à C, la primera Tecla negra à la izquierda es el sustenido de C sol fa vt; la segunda es B molado de E la mi; la tercera es el sustenido de F fa vt; la quarta, el sustenido de G sol re vt; y la quinta, el B molado de B fa B mi; y estas Teclas negras mezcladas con las blancas, componen el Systema *Diatonico-Cromatico*, en el qual todas las cuerdas distan de su inmediata vn semitono; y queda la octava dividida en doze partes, ò semitonos desiguales.

Coligese de aqui que los B molados estàn sobre la cuerda grave inmediata vn semitono mayor, porque distan de la aguda vn semitono menor; y los sustenidos distan de la aguda inmediata vn semitono mayor, por estar sobre la grave vn semitono menor.

PROP. IX. Theorema.

Explicase el Systema Diatonico-Cromatico-Enharmonico.

DE lo dicho en la Proposicion passada se colige, que en el Systema alli expressado, solamente ay sustenidos en G, C, y F, y Bmolados en E, y B; de que se sigue no hallarse en todos lugares con su devida cantidad algunas consonancias, porque la Tercera mayor, que ay de B blanca à E negra passa de su devida dimension, y es aspera; porque aunque de B blanca à C negra ay vn tono justo; pero de C negra hasta E negra ay dos semitonos mayores, el vno desde C negra hasta D, y el otro desde D à

E

E negra; y este defecto no estaria, si antes de E negra huviesse vn sustenido de D la sol re, el qual distaria del b molado de E la mi, àzia la parte grave vna Diesi harmonica, que es la diferencia del semitono mayor, y menor. Asimismo, las Terceras menores de F fa vt blanco al sustenido de G, son defectuosas, por quanto constan de vn tono que ay de F à G, y de vn semitono menor, que ay de G à G sustenido, siendo asi, que requiere para su perfeccion vn tono, y vn semitono mayor; de que se sigue ser sobrado blandas, por faltarles vna Diesi harmonica.

Estos, y otros defectos semejantes que ay en el Systema *Diatonico-cromatico*, dispuesto en la forma explicada, se corregiràn añadiendo b molados à G, F, y C; y dando sustenidos à D, y A; y porque si estas Teclas, ò cuerdas se añadiessen al Systema, distarian de los b molados, y sustenidos arriba explicados, vna Diesi harmonica, que es propria del Genero Enharmonico, por esso llamo al Systema asi dispuesto, *Diatonico-cromatico enharmonico*, el qual tendria del *Diatonico* los tonos, y semitonos mayores; del *Cromatico*, los semitonos menores; y del *Enharmonico*, las Diesis. Tambien se podian añadir sustenidos à E la mi, y B mi, como se verà despues: pero por la dificultad de tañer este instrumento, se han contentado los Musicos con el Systema, y Teclado *Diatonico-cromatico*; pero corregido del modo que luego dirè.

CAPITULO III.

DEL MONOCHORDO, Y SU division.

PROP. X. Theorema.

Explicase la Naturaleza, y vtilidad del Monochordo.

Consta el Systema musico, como arriba dixe, de muchas cuerdas, tantas quantas incluye vozes; y cada vna tiene la longitud requisita, para que con su sonido

nido forme el intervalo, que debe formar con la cuerda principal, que es la mas grave; pero por evitar la multitud, que es madre de la confusion, se declara qualquiera Systema musico con sola vna cuerda, haziendo de ella tantas particiones, que cada vna represente su cuerda del Systema; y cada parte de la division, comparada con la cuerda entera, declara la razon; y consonancia que guarda en el Systema cada cuerda con la principal, ò fundamental.

Esta cuerda estendida sobre qualquiera instrumento concavo, y proporcionado para el sonido; y señaladas sus divisiones debaxo de ella en el instrumento, dà todos los intervalos musicos, poniendo vn banquillo, yà en vna, yà en otra division, y comparando el sonido de qualquiera parte con el que produce, si se tañe toda entera.

Vese claramente en la fig. 8. que si se pone el banquillo en G, y se tañe la porcion GN, formarà vna Quinta sobre el sonido de toda la cuerda MN, por ser, como se supone, GN, dos tercios de toda la MN; y porque este instrumento dà todo el Systema en vna sola cuerda, se llama, *Monochordo*; sì bien es verdad, que para poder oìr las dos vozes de vn intervalo juntas, se pone al lado de la cuerda MN otra cuerda OP igual, y vnisona con la sobredicha, para que tañendo juntamente la porcion GN, y toda la OP, se oygan las dos vozes de la Quinta, vnidas, y se haga mejor concepto de las consonancias, y disonancias. Tiene otra vtilidad el Monochordo; y es, que con èl se pueden templar otros instrumentos con gran perfeccion, como se verà despues.

PROP. XI. Problema.

Division de Monochordo Diatonico, y Diatonico-cromatico.

TOmense dos cuerdas iguales XZ, YV (fig. 8.) y estiendanse sobre vn instrumento, de suerte, que esten vnisonas; hecho esto, se pondràn todos los intervalos harmonicos en esta forma, por la tabla de la Propos. 18. del libr. 1. de este Tratado.

Dividase vna de las dichas cuerdas en tantas partes igua-

iguales, como dize el numero primero de qualquiera intervalo; y tomando con vn puentecillo las que dize el numero ſegundo del miſmo intervalo, el ſonido de eſtas con el de la cuerda entera darà la conſonancia, ò diſonancia que ſe pretende: como ſi ſe quiere hallar el Diapente, buſco en la Tabla ſu proporcion, y hallo ſer como 3. à 2. Divido, pues, la cuerda xz en tres partes iguales; y tomando las dos Gz, poniendo vn puentecillo en G, la entera YV, con la parte de GZ, ſonarà vna Quinta.

De eſta ſuerte ſe hallaràn todos los intervalos, y puntos del Genero Diatonico, porque ſuponiendo que la cuerda entera, y fundamentales C ſol fa vt, la ſobredicha diviſion en G, darà G ſol re vt, en Quinta ſobre C ſol fa vt; y dividiendo la miſma cuerda en 5. partes, las quatro que ay de E à z, daràn la Tercera mayor; y el punto E de la diviſion,ſobredicha, ſerà E la mi; aſsimiſmo hallarè el Diateſaron, y tendrè el punto F, que es F fa vt, haſta llegar à la Octava C.

Para la ſegunda Octava mas aguda, ſe tomarà CZ, mitad de la cuerda, como ſi fueſſe entera, y ſe continuarà en ella la miſma operacion. Eſta practica es canſada, por averſe de hazer tantas diviſiones diferentes de vna miſma cuerda; y aſsi, es mucho mejor dividirla en vn crecido numero de partes iguales; y tomando ſiempre eſte numero por antecedente de todas las razones de los intervalos, ſacar por regla de tres los conſequentes de cada razon.

Supongamos por exemplo, la cuerda dividida en 1000. y quiero que la razon de la Octava, que es 2. à 1. en lugar del antecedente 2. tenga el antecedente 1000. Diſpongo la regla de tres, diziendo: ſi 2. dàn 1. luego 1000. daràn 500. y tengo la razon de la Octava en eſtos terminos 1000. à 500. Con eſte artificio ſe ha formado la Tabla ſiguiente, en la cuerda divida en 1000. 000. partes para mayor preciſion; y ſe ha de ſuponer tienen todos los intervalos por antecedente 1000. 000. con que los numeros, que ay en la Tabla en derechura de cada intervalo, ſon el conſequente de ſu razon. Por eſta Tabla ſe haze la diviſion de la cuerda, ò Monochordo, tanto en el Genero

Diatonico, como en el Diatonico-cromatico, y Diatonico-cromatico-enharmonico, como luego dirè.

TABLA I.

De los intervalos harmonicos en vna cuerda dividida en 1000.000. *partes.*

Diapason, ò Octava	500.000.
Septima mayor	533.333.
Septima menor	555.555.
Sexta mayor	600.000.
Sexta menor	625.000.
Diapente, ò Quinta	666,666.
Diatesaron, ò Quarta	750.000.
Ditono, Tercera mayor	800.000.
Semiditono, Tercera menor	833.330.
Tono mayor	888.888.
Tono menor	900.000.
Semitono mayor	937.500.
Semitono menor	960.000.
Diesis	970.469.
Coma	987.654.

El vso de esta Tabla, para la division del Monochordo es el siguiente: Formese vn Pitipie igual à la cuerda xz, dividido en 1000.000. ù en 10000. partes, segun dixe en la Propos.2. lib. 8. de la Geom. Pract. Y suponiendo, que la cuerda entera YU, es C sol fa vt, para colocar la division propria de D la sol re, que està vn tono mayor sobre C sol fa vt, entro en la Tabla, y veo que el consequente del tono mayor, es 8888. (las dos vltimas cifras, se han de omitir, aviendose hecho el Pitipie de 10000.partes, como aora lo supongo) tomo, pues, del Pitipie las 8888. y las passo de Z à D, y el punto D, serà D la sol re; de suerte, que la cuerda entera YV con el pedazo ZD, sonarà vn tono mayor.

Para colocar E la mi, que està vna Tercera mayor sobre C sol fa vt, tomo del Pitipie 8000.partes, que dà la Tabla, y passandolas de z à E, serà el punto E E la mi; y assi, voy

voy prosiguiendo todas las demàs divisiones, tomando para F fa vt, el consequente de la Quarta 7500. para G sol re vt, el de la Quinta 6666. para A la mi re, el de la Sexta mayor 6000. para el mi de B fa B mi, el de la septima mayor 5333. y con esto queda dividida vna octava en el Monochordo, segun el orden Diatonico.

Para dividir la Octava, segun el orden Diatonico-Cromatico, solo falta añadir à lo sobredichos los sustenidos, y B molados: esto es, à C sol fa vt, F fa vt, y G sol re vt, sustenidos; y à E la mi, y B mi, B molados. Hazese en esta forma. Para poner el sustenido de C sol fa vt, basta tomar del Pitipie 9600. partes, que son el consequente del semitono menor, y se tendrà el sustenido que se busca, vn semitono menor sobre C sol fa vt. Para hallar el sustenido de F fa vt, se harà vna regla de tres, como toda la cuerda XZ 10000. à 9600. semitono menor; assi la cuerda ZF, que es el Diatesaron sobre C 7500. al sustenido de F fa vt 7200. Para hallar el sustenido de G sol re vt, serà como toda la cuerda 10000. à 9600. assi 6666. cuerda de la Quinta, à 6399.

Para los B molados se dispondrà la regla de tres, como se sigue: Porque el B molado de E està vn semitono meno-menor mas baxo que el mismo E, serà la proporcion, como la cuerda del semitono menor 9600. con 10000. toda la cuerda; assi la cuerda ZE 8000. consequente de la Tercera mayor, à 8333. B molado de E la mi. Tambien se podia tomar el mismo consequente de la Tercera menor, como està en la Tabla, por estàr el B molado de E la mi, tercera menor sobre C sol fa vt.

Para el B molado de B fa b mi se obrarà de la misma suerte, y quedarà dividida la Octava, segun el orden Diatonico-Cromatico: donde si bien se considera, se vè claramente quedar la Octava dividida en semitonos de tres diferentes magnitudes; porque los tonos menores quedan divididos en los dos semitonos, vno mayor 16. à 15. y otro menor de 25. à 24. pero puesto el sustenido, ò B molado en vn tono mayor, lo restante de todo el tono es vn semitono diverso de los sobredichos que està en la razon de 27.

 à 25.

à 25. Con este mismo artificio se pueden poner los sustenidos, que faitan en D,E,A,B; y los B molados, que faltan en D,F,G,A,C; y estaria el orden Diatonico-Cromatico-Enharmonico en el Monorchordo.

PROP. XII. Theorema.

Defectos que ay en la sobredicha division del Monochordo Diatonico.

SEgun la division del Monochordo, que hemos explicado, todas las vozes, ò cuerdas comparadas con la cuerda total, ò fundamental, forman los intervalos con su debida magnitud, y perfeccion: esto es, ZD con toda la cuerda harà vn tono mayor; EZ con la misma cuerda total, haze Tercera mayor perfecta; FZ, Quarta; GZ, Quinta; y assi de las demàs; pero aunque estas divisiones, comparadas con toda la cuerda, formen los intervalos perfectos; pero de esta perfeccion nazen muchas imperfecciones, porque si comparamos vnas divisiones con otras, hallarèmos carecer muchos intervalos de su debida cantidad; y assi la Quinta que ay de D la sol re, à A la mi re, es defectuosa por faltarle vna Coma; porque siendo tono menor el que ay de D à E, mayor el de F à G, y menor el de G à A, se sigue constar la sobredicha Quinta de dos tonos menores, vno mayor, y vn semitono mayor; siendo assi, que para su perfeccion requiere dos tonos mayores; luego le falta vna Coma, que es la diferencia del tono mayor al menor.

Y esta es la causa, porque templando vn Organo, ò Harpa por Octavas, y Quintas, si las Quintas se ajustan del todo à su debida perfeccion, salen necessariamente algunas cuerdas sobrado altas; porque quedando la cuerda A la mi re con el intervalo justo, que debe tener sobre la principal, ha de hazer con D la sol re vna Quinta defectuosa, que tenga vna Coma menos de lo que requiere: luego si se pone en Quinta perfecta sobre D la sol re, distarà de la cuerda principal vna Coma mas de lo debido: de que se ha de seguir necessariamente, que las cuerdas que se templaren sobre D, estaràn mas altas de lo que se requiere en la segun-

gunda Octava; y de esto resultarà otro error semejante en la Octava tercera.

Para hazer mas cabal concepto de esto, considerense los numeros siguientes, que expressan el intervalo justo, que tiene cada cuerda con su inmediata, y con la principal; y se suponen por las vibraciones de las cuerdas, que para el caso es lo mismo que si se supusieran por la longitud.

24.	27.	30.	32.	36.	40.	45.	48.	54.	60.	64.	72.	80.	90.	96.
vt	re	mi	fa	sol	re	mi	fa	re	mi	fa	sol	re	mi	fa
C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C
108.	120.	128.	144.											
re	mi	fa	sol.											
D	E	F	G.											

Sea la primera cuerda C 24. con que D, por estàr vn tono mayor sobre C, serà 27. E vn tono menor sobre D, serà 30. F vn semitono mayor sobre E, serà 32. G vn tono mayor sobre F, serà 36. A vn tono menor sobre G, serà 40. B vn tono mayor sobre A, serà 45. C vn semitono mayor sobre B, serà 48. y assi de las demàs; de suerte, que el numero de cada cuerda con el de su inmediata, expressa el intervalo justo que ay entre las dos. Assimismo, comparando el numero de cada cuerda con el 24. que es C cuerda principal, declara el intervalo justo, que segun su orden debe tener con la dicha cuerda C: como E con C, Tercera mayor 30. à 24. F con C, Quarta 32. à 24. G con C, Quinta 36. à 24. y assi de las demàs.

Aqui se vè claramente, que segun esta disposicion, que es la rigurosa que pide la division del Monochordo Diatonico, la Quinta de D à A es defectuosa, porque 40. con 27. no es sesquialtera; si que para ser sesquialtera, y Quinta perfecta, A debia ser 40. y medio, y que esto que le falta sea vna Coma, se haze manifiesto, restando la razon de 40. à 27. de la razon de 3. à 2. porque se hallarà ser el residuo la razon de 81. à 80. que es justamente vna Coma. De aqui se sigue, que si la quinta de D à A, se haze perfecta, la cuerda A estarà mas alta de lo que debia, se-

segun la disposicion sobredicha; y por consiguiente la otra cuerda A, que haze con ella Octava alta, no serà 80. si 81. y estarà mas alta de lo que se requiere vna Coma: luego si templando el instrumento se guarda todo el rigor en la perfeccion de las Quintas, necessariamente han de salir sobrado altos otros muchos intervalos.

A mas de esto ay muchas Terceras menores defectuosas, porque à la Tercera menor de D à F, le falta vna Coma, por constar de vn tono menor, y de vn semitono mayor, siendo assi, que para su perfeccion requiere el tono mayor: por la misma razon es imperfecta la que ay de G al fa de B fa; y si consideramos interpuestos los sustenidos, y B molados, que arriba diximos, todas las Terceras menores, que se cuentan incluyendo vn tono menor, y el siguiente semitono (que son muchas) son imperfectas: constan, pues, claramente las imperfecciones de este Monochordo.

PROP. XIII. Problema.

Corrigese el Monochordo Diatonico, y Diatonico-Cromatico; y se explica su disposicion en los Organos.

De lo dicho en la Proposicion passada consta ser notable defecto el de vna Quinta en el Monochordo Diatonico; y aunque este defecto no se advertiria jamàs en las vozes humanas, porque el Cantor diestro siempre forma los intervalos con la perfeccion que requieren, ni tampoco en los instrumentos que carecen de vozes permanentes, y fixas, como son los Violònes; porque con los dedos de la mano izquierda puede el Musico determinar à su alvedrio los intervalos; pero en los instrumentos que tienen vozes constantes, y determinadas, sin poder subir, ni baxar à arbitrio de quien les tañe, el defecto de vna Quinta, y de las Terceras menores, que arriba dixe, perseveraria irremediable: por lo qual fue necessaria la correccion del Monochordo, la qual hizo Guido Aretino, y es comunmente admitida en los Organos, Espinetas, Clavicymbalos, y otros instrumentos de vozes determinadas, y consiste

te en hazer todos los tonos iguales, con lo qual, aunque con imperfeccion insensible de muchas consonancias, se evita el defecto sensible de la Quinta, y los demàs que se han ponderado. La igualacion de los tonos, se haze en esta forma.

Dividase la Tercera mayor, ò Ditono en dos partes iguales, hallando (13.1.) vn medio Geometrico entre 10000. y 8000. que son los terminos de su razon en la Tabla de la Propos. 11. y serà el medio 8944. con que el Ditono queda intacto, y dividido en dos tonos iguales, y estos son los tonos del Organo. De que se sigue quedar el tono mayor disminuido media Coma, y el menor aumentando en otra media Coma. Tambien se puede hazer esta igualacion, dividiendo la Coma en dos partes iguales, hallando vn medio Geometrico entre sus terminos, que son segun la Tabla sobredicha 10000. y 9876. y serà 9938. la media coma, añadiendo esta al tono menor, y quitandola al tono mayor, quedaràn iguales, pero mas facilmente se hazè esta igualacion, dividiendo el Ditono, como arriba dixe.

Siguese de esto, que por constar la Octava de cinco tonos, de los quales, los tres son mayores, y de dos semitonos mayores, avrà tres medias comas, que se quitan de los tres tonos mayores, que repartir; à cada vno de los dos tonos menores, se dà media coma, con que es forçoso sobre aun vna mitad de Coma; esta, pues, se divide en dos partes iguales, que son dos quartos, y se dà vno à cada semitono mayor; con que cada semitono crece la quarta parte de vna Coma; y esta es la disposicion de las vozes en el Genero Diatonico, que se halla en las Teclas blancas de el Organo, Clavicymbalo, &c.

De aqui se sigue, quedar tambien aumentados los semitonos mayores, y menores: esto es, los B molados, y subStenidos del Organo, cada vno vna quarta parte de Coma; porque como el semitono mayor, y menor hagan justamente vn tono menor, quedando este aumentado media Coma, le ha de caber à cada semitono vna quarta parte

te de Coma. El modo de hallar la quarta parte de vna Coma, y de añadirla à los semitonos, para tener los subſtenidos, y B molados del Organo, es el ſiguiente.

Tomenſe de la Tabla pueſta en la Propoſ. 11. los numeros de la Coma 10000. y 9876. y hallenſe entre ellos tres medios proporcionales (2. *lib.* 3. *Arithm. Super.*) y el mayor de ellos 9968. ſerà la quarta parte de vna Coma. Hecho eſto, ſe añadirà facilmente eſta quarta parte de Coma à cada ſemitono, tomando ſu numero en la Tabla ſobredicha, y formando vna regla de tres, diziendo: ſi 10000. dàn 9968. quedaràn 9375. numero del ſemitono mayor, y ſalen 9345. y eſte es el B molado, ò ſemitono mayor del Organo: aſsimiſmo, ſi 10000. dàn 9968. quedaràn 9600. numero del ſemitono menor, y ſalen 9570. que es el ſemitono menor, ò ſubſtenido del Organo; y eſtos ſon los B moles, y ſubſtenidos de la diviſion en tonos iguales.

Eſto ſupueſto, ſerà facil de determinar lo que crece, ò mengua cada intervalo: La Tercera mayor, y la Octava quedan con ſu juſta medida: La Quarta crece vna quarta parte de Coma, porque ſobre la Tercera mayor incluye al ſemitono mayor, que como dixe, eſtà aumentado vna quarta parte de Coma: La quinta mengua vna quarta parte de Coma, porque con la Quarta compone la Octava juſta: luego quanto crece la Quarta, mengua la Quinta: La Sexta mayor crece otra quarta parte de Coma, por conſtar de vna Tercera mayor, y de vna Quarta: La Tercera menor mengua vna quarta parte de Coma, porque con la Tercera mayor compone la Quinta: La ſexta menor queda con ſu juſta medida, por componerſe de la Quarta, y Tercera menor, y lo que crece aquella, mengua eſta: La ſeptima de C ſol fa vt, à B mi, mengua tambien vna quarta parte de Coma, por quanto crece el ſemitono mayor de B mi, à C, vna quarta parte de Coma.

Todo eſto ſe reconocerà facilmente, comparando la Tabla ſiguiente con la que puſe en la Propoſ. 11. advirtiendo, que las conſonancias, è intervalos, que tienen mayores numeros, ſon menores; y mayores, los que menores; y que ſon conſequentes, à quienes ſe compàra la cuerda

en-

entera, ò fundamental, que ſe ſupone de 1000.000. partes. El modo de calcular la Tabla, es el ſiguiente.

Quiero, por exemplo, calcular vna Quinta del Organo, por tener eſta vn quarto de Coma menos de lo que requiere, digo: como 9968. numero de vn quarto de Coma, à toda la cuerda 10000. aſsi 6666. numero de la Quinta perfecta, que ſe halla en la Tabla de la Propoſ. 11. à 6687. Quinta del Organo: en eſta miſma forma ſe hallaràn los demas intervalos diſminuidos en vn quarto de Coma. En los aumentados ſe diſpondrà la regla de tres, en la forma ſiguiente: Quiero ſacar la Quarta, ò Diateſaron del Organo, que crece vna quarta de Coma: digo, como toda la cuerda 10000. à 9968. quarto de Coma; aſsi 7500. numero de la Quarta (Propoſ. 11.) à 7476. Diateſaron del Organo; y aſsi en las demàs.

TABLA II.

De las conſonancias del Organo comun.

Sexta mayor.	5981. 39.
Sexta menor.	6250. 00.
Quinta.	6687. 45.
Quarta.	7476. 74.
Tercera mayor.	8000. 00.
Tercera menor.	8359. 87.
Tono.	8944. 27.
Semitono mayor.	9345. 92.
Semitono menor.	9570. 13.
Media Coma.	9938. 07.
Quarta parte de Coma	9968. 91.

PROP. XIV. Problema.

Diviſion del Monochordo en todos los intervalos del Organo comun.

DE lo dicho en la Propoſ. antecedente, queda facilitada la diviſion del Monochordo en todos los intervalos del Organo, coſa muy importante, no ſolo para determinar la longitud de las flautas, ſi tambien para dividir

vna cuerda, de suerte, que pueda servir para el temple de los Organos, Clavicymbalos, &c. ajustando vnisonas las flautas, ò cuerdas con las divisiones de aquélla.

En el Organo, à mas del orden Diatonico, se ponen los tres substenidos de C, F, G, y los dos b moles en B, y E. Puedense, en lugar de esto, poner, ò solos los substenidos en C, D, F, G, A; ò solos los b móles en D, F, G, A, B, ò alguna otra combinacion, de muchas que son possibles; y en cada vna se hallaràn algunas consonancias, con mayor perfeccion que en las otras, sin que sea facil determinar, que disposicion sea la mejor; pero todas convienen en el fin principal, que es dàr la octava dividida con trece Teclas en doze semitonos desiguales.

Para executar esta division, sirve la Tabla siguiente, en la qual estàn tambien los substenidos de D, E, A, B, y los B molados de G, A, C, D, F, que faltan en el Teclado comun, por si alguna vez se quisieren poner en practica: los substenidos, y B molados vsados, vàn con letra redondilla, y con bastardilla los añadidos.

Fabricase la Tabla de esta manera: En C, se pone la cuerda fundamental, cuyo numero es 1000.000. En D, distante vn tono sobre C, se pone el numero de la Tabla 2. correspondiente al tono. En E, porque dista vna Tercera mayor sobre C, se pone el numero de dicha Tabla 2. correspondiente à la Tercera mayor; y assi en los demàs intervalos de la Octava, correspondientes al Genero Diatonico: los substenidos, y b molados se pondràn por las reglas de tres, dispuestas como en la Proposicion antecedente.

Aunque esta Tabla contiene solamente la division de vna Octava, sirve tambien para dividir dos, ò tres Octavas; porque si se toma la mitad de la cuerda, como si fuesse entera, sirven los mismos numeros para la segunda Octava; y tomando la quarta parte de la cuerda, sirven para la Tercera: tambien respecto de toda la cuerda se puede tomar la mitad de cada numero para dividir la segunda Octava, y el quarto para la Tercera.

TA-

TABLA III.

De las consonancias para templar los Organos, Clavicymbalos, y Harpas de dos ordenes, con los Sustenidos, y Bmolados de todas las Teclas blancas.

C.	5000. 00.	ſ.f.	7155. 41.
ſ.b.	5120. 00.	F.	7476. 74.
b.c.	5224. 53.	ſ.e.	7654. 27.
B.	5349. 92.	b.f.	7812. 49.
b.B.	5590. 17.	E.	8000. 00.
ſ.a.	5724. 33.	b.e.	8359. 25.
A.	5981. 39.	ſ.d.	8559. 87.
b.a.	6249. 99.	D.	8944. 27.
ſ g.	6400. 00.	b.d.	9345. 92.
G.	6687. 40.	ſ.c.	9570. 23.
b.g.	6987. 70.	C.	10000. 00.

CAPITULO IV.

DEL CIRCULO MUSICO.

PROP. XV. Theorema.

Determinaſe como ſe pueda dàr el Circulo Muſico.

EL Circulo Muſico no es otra coſa, que la diſpoſicion de las cuerdas, ò Tecias, con tal arte, que de qualquiera punto ſe hallen todas las conſonancias, ſubiendo, ò baxando con la miſma proporcion. Eſte Circulo es impoſsible, ſi las conſonancias han de guardar ſu juſta medida, como conſta de lo que arriba dixe, en la diviſion de Monochordo Diatonico; pero es muy facil ſacando las conſonancias de ſu lugar, de ſuerte, que no oſendan al oìdo.

Conſiguese, pues, el Circulo Muſico, dividiendo la oc-

tava en partes iguales ; y es la razon , porque siendo iguales los intervalos que ay de vna à otra cuerda , necessariamente se han de encontrar las mismas consonancias de qualquier punto , subiendo , ò baxando : y en tan pequeñas partes se puede dividir la Octava, que sea insensible el transito de vna cuerda à su inmediata , con que se podrà vna tonada empezar à tañer de vn punto , è ir subiendo , sin advertirse diferencia alguna, y bolver por los mismos passos al punto donde empezò , lo que no puede dexar de causar vna muy apacible melodia.

Para proceder con acierto ; se ha de imaginar cada tono dividido en dos, ò en tres, ò cinco, &c. partes iguales ; y de estas se determinaràn algunas para el semitono mayor ; y supuesto , que la Octava ha de constar de cinco tonos , y dos semitonos mayores , se hallaràn facilmente las partes iguales en que se ha de dividir ; como si deseo , que el tono quede dividido en tres partes iguales , y que las dos hagan vn semitono mayor , hallarè que multiplicando los cinco tonos por 3. dàn 15. y los dos semitonos multiplicados por 2. dàn 4. y estas 4. con las 15. hazen 19. partes iguales , en que se ha de dividir la Octava ; y asi de qualquiera otra division.

PROP. XVI. Problema.

Divir la Octava en que qualesquiera partes iguales.

DIvidir la Octava en partes iguales consiste en dividir la razon dupla en partes iguales , hallando entre sus terminos algunos medios Geometricos ; porque aviendo de ser los intervalos iguales , es forzoso que la misma razon tenga la cuerda primera con la segunda , que esta con la tercera , y esta con la quarta , &c. con que los numeros que declaran la longitud de las cuerdas , han de proceder en vna misma razon , componiendo vna progresion Geometrica , cuyos extremos tengan la razon dupla ; lo qual se consigue hallando algunos medios Geometricos entre los terminos de la dupla, ò Diapason. Estos se hallaràn con facilidad por la regla dada en la Arithmetica Superior, lib. 3. Prop. 2. y mas facilmente por los Logarithmos en esta forma.

Supongo, que toda la cuerda es 10000. y ſu mitad 5000. que es la Octava, ò Diapaſon. Buſco en la Tabla de los Logarithmos (que traen diferentes Autores) el Logarithmo de 10000. y es 4. 0000000. Buſco el de 5000. y es 3. 6989700. la diferencia de los Logarithmos hallados es 3010299. eſta ſe ha de partir por el numero de las partes en que ſe quiere dividir la Octava: ſupongo, pues, ſe aya de dividir en 19. partes, de las quales tendrà tres cada tono, dos el ſemitono mayor, y vna el menor: parto, pues, la ſobredicha diferencia de los Logarithmos por 19. y ſale el quociente 158437. Eſto ſe ha de añadir al Logarithmo menor, que es 3. 6989700. y ſaldrà 3. 7148136. y eſte es el Logarithmo de la primera diviſion, al qual ſe le añade otra vez el miſmo quociente, y ſale 3. 7306574. Logarithmo de la ſegunda diviſion. A eſte ſe añade otra vez el quociente miſmo, y ſe tiene el Logarithmo de la diviſion tercera; y aſsi ſe continua haſta 19. vezes: eſto es, tantas quantas fueren las partes en que ſe quiere dividir la Octava. Hallados yà todos los Logarithmos de las diviſiones, ſe iràn buſcando en la Tabla de los Logarithmos; y ſe tomaràn los numeros que les correſponden; y eſtos ſon los medios que dividen la Octava en partes iguales, que ſe diſpondràn en forma de Tabla, como ſe vè en las que ſe ſiguen.

PROP. XVII. Problema.

Divideſe la Octava en 19. partes iguales con 20. Teclas.

CON el artificio explicado en la Propoſ. antecedente, ſe ha fabricado la ſiguiente Tabla, en la qual eſtà dividido el Diapaſon en 19. partes iguales con 20. Teclas; y cada tono en tres partes iguales.

TABLA IV.

Que divide el Diapaſon en 19. partes iguales con 20. Teclas.

C	5000. 000.
ſb	5185. 774.
R	5378. 374.

b	5578. 289.	ſb	7745. 228.
ſ	5785. 551.	E	8034. 112.
A	5000. 513.	b	8333. 620.
b	6223. 462.	ſ	8642. 218.
ſ	6454. 696.	D	8963. 320.
G	6694. 520.	b	9296. 353.
b	6943. 256.	ſ	9641. 759.
ſ	7201. 232.	C	10000. 000.
F	7468. 927.		

En eſta diviſion de la Octava, la Dieſi Enharmonica, es igual al ſemitono menor; porque teniendo el ſemitono mayor dos partes de las tres, en que eſtà dividido el tono; y el ſemitono menor vna, es eſte igual à la diferencia que ay entre los dos, que es la Dieſi Enharmonica. La Tercera menor, y Hexachordo mayor ſalen iguales à las conſonancias verdaderas. Todas las demàs conſonancias ſalen fuera de ſu lugar, como ſucede tambien en el temple comun del Organo, y todas ellas ſe pueden facilmente examinar, cotejando los numeros de eſta Tabla, con los de la Tabla 3. de las conſonancias del Organo.

Puedeſe diſponer el Teclado facilmente, ſegun eſta diſpoſicion, poniendo dos Teclas negras donde aora ay vna entre E la mi, y F fa vt; y otra entre B mi, y C ſol fa vt; y para mayor claridad ſe pueden diſponer los ſuſtenidos con Teclas negras, y los b molados con Teclas coloradas; y à cada vna de las dos, que eſtàn entre E, y F, y entre B, y C, darles los dos colores, por ſervir cada vna de ellas juntamente de ſuſtenido, y b molado, dividiendo el ſemitono mayor, que ay de E a F, y de B à C, en dos partes iguales.

PROP. XVIII. Problema.

Divideſe la Octava en 31. partes iguales, con 32. Teclas.

FRanciſco Salinas, Autor perito en la Muſica, haze mencion de eſta diviſion de la Octava en treinta y vna partes iguales, con 32. Teclas. Y N. Pomar, Cavallero Valenciano, ſin tener noticias eſpeculativas, fabricò vn Or-

Organo de cinco Teclados, que presentò al Catholico Rey de las Españas Felipe IV. Estos cinco Teclados, no son otra cosa, que la division del tono en cinco partes; y de la Octava en 31. mas el primero que executo esta division por numero, fue D. Felix Falcò de Belaochaga, Cavallero tambien Valenciano, insigne en las Mathematicas, y en toda erudicion, à quien debemos la invencion de vn instrumento, llamado *Tetrachordo*, con que se facilita en gran manera el temple de los Organos, Clavicymbalos, &c. del qual tratarèmos despues. Esta division se contiene en la Tabla siguiente, que se fabrica con el mismo artificio que la antecedente.

TABLA V.

Que divide el Diapason en 31. partes iguales, con 32. Teclas.

C	5000. 00.	ſ.2.	7150. 56.
b.1.ſ.2.	5113. 05.	ſ.1.	7412. 24.
b.2.ſ.1.	5228. 67.	F.	7477. 58.
B.	5346. 89.	b.1.ſ.2.	7646. 66.
b.1.	5467. 79.	b.2.ſ.1.	7819. 57.
b.2.	5591. 43.	E.	7996. 38.
ſ.2.	5717. 86.	b.1.	8177. 19.
ſ.1.	5847. 15.	b.2.	8362. 09.
A	5979. 36.	ſ.2.	8551. 16.
b.1.	6114. 56.	ſ.1.	8744. 52.
b.2.	6252. 82.	D.	8942. 24.
ſ.2.	6394. 21.	b.1.	9144. 44.
ſ.1.	6538. 79.	b.2.	9351. 21.
G	6686. 64.	ſ.2.	9562. 65.
b.1.	6837. 84.	ſ.1.	9778. 88.
b.2.	6992. 45.	C.	10000. 00.

Segun esta division de la Octava, de las 31. partes iguales, en que està dividida, se dan cinco à cada tono, y tres al semitono mayor, y dos al menor. Entre las cuerdas que distan entre si vn tono, ay quatro cuerdas, que son las que le dividen en cinco partes La primera subiendo, se lla-

llama, *Subſtenido primero*: La ſegunda, *Subſtenido ſegundo*: La tercera, *b molado ſegundo*: La quarta, *b molado primero.* Entre las otras cuerdas, que diſtan vn ſemitono mayor, como entre E, y F, y entre B, y C, ay dos cuerdas, que le dividen en tres partes: La primera, ſirve de *b molado ſegundo, y Subſtenido primero*: La ſegunda, de *b molado primero, y Subſtenido ſegundo.*

Es tambien conſtante, que en eſta diviſion, la Dieſis es la mitad del ſemitono menor; y ninguna de las conſonancias (exceptùando la Octava) tiene ſu riguroſa cantidad, como ſe verà, comparando ſus numeros, con los de las conſonancias verdaderas, que eſtàn en la Tabla 1. pero ſi ſe confieren con los numeros de las conſonancias del Organo comun, que eſtàn en la Tabla 2. ſe hallarà diferenciarſe muy poco; pero eſto, no obſtante por proceder las conſonancias, ſegun eſta diviſion, con mayor vniformidad que las del Organo comun, parece preciſo hagan mejor efecto; y aſsi, juzgo ſe aplicaria con acierto ſu temple à los Organos.

Tambien es cierto, que ſi ſe diſponen los cinco Teclados, dàn el Circulo muſico, pues puede el Organiſta dieſtro paſſar inſenſiblemente de vn termino à otro inmediato, porque la poca diferencia de vna quinta parte de tono, ſe diſsimula con facilidad; de eſta ſuerte puede mudar los terminos ſubiendo, y deſpues baxando haſta bolver al miſmo punto en que empezò; pero no carecerà eſto de dificultad en la practica, y ſerà neceſſario exercitarſe mucho en eſta nueva diſpoſicion de Teclado.

PROP. XIX. Problema.

Divideſe la Octava en 12. partes iguales.

CON el miſmo artificio, que ſe explicò en la Propoſ. 16. ſe divide el Diapaſon en 12. partes iguales, de las quales ſe dàn dos à cada tono, y vna al ſemitono, con que los cinco tonos de la Octava contienen 10. partes, que con las dos de los ſemitonos, hazen 12. Eſta diviſion ſe contiene en la Tabla ſiguiente.

TA-

TABLA VI.

Que divide la Octava en 12. partes iguales; y sirve para la Guitarra Española.

C.	5000.00.
B.	5297.31.
ſ.b.	5612.31.
A.	5946.03.
ſ.b.	6299.65.
G.	6674.19.
ſ.b.	7071.06.
F.	7491.53.
E.	7937.00.
b.ſ.	8408.97.
D.	8908.99.
ſ.b.	9438.74.
C.	10000.00.

Eſta diviſion es la que mas ſe aparta del rigor harmonico, porque quita totalmente la Dieſi, que es la diferencia del ſemitono mayor, y menor, no aviendo en eſta diviſion diferencia alguna de ſemitonos, por eſtàr toda la Octava dividida en ſemitonos iguales. Tambien todas las conſonancias eſtan fuera de ſu debido lugar.

Pero eſto no obſtante, tiene manifieſtas conveniencias, como ſe vè en la Guitarra Eſpañola, en quien ſe halla eſta diviſion. Mas aunque en eſte inſtrumento haga buen efecto, no ſe ſigue la aya de hazer tambien ſi ſe aplica al Organo; porque teniendo eſte las vozes muy intenſas, y ſalidas, no diſimularà los defectos que la Guitarra oculta con la remiſſion, y tenuidad de las ſuyas. No obſtante eſto, no faltaràn razones, y experiencias, que perſuaden ſe puede aplicar eſte temple con acierto al Organo.

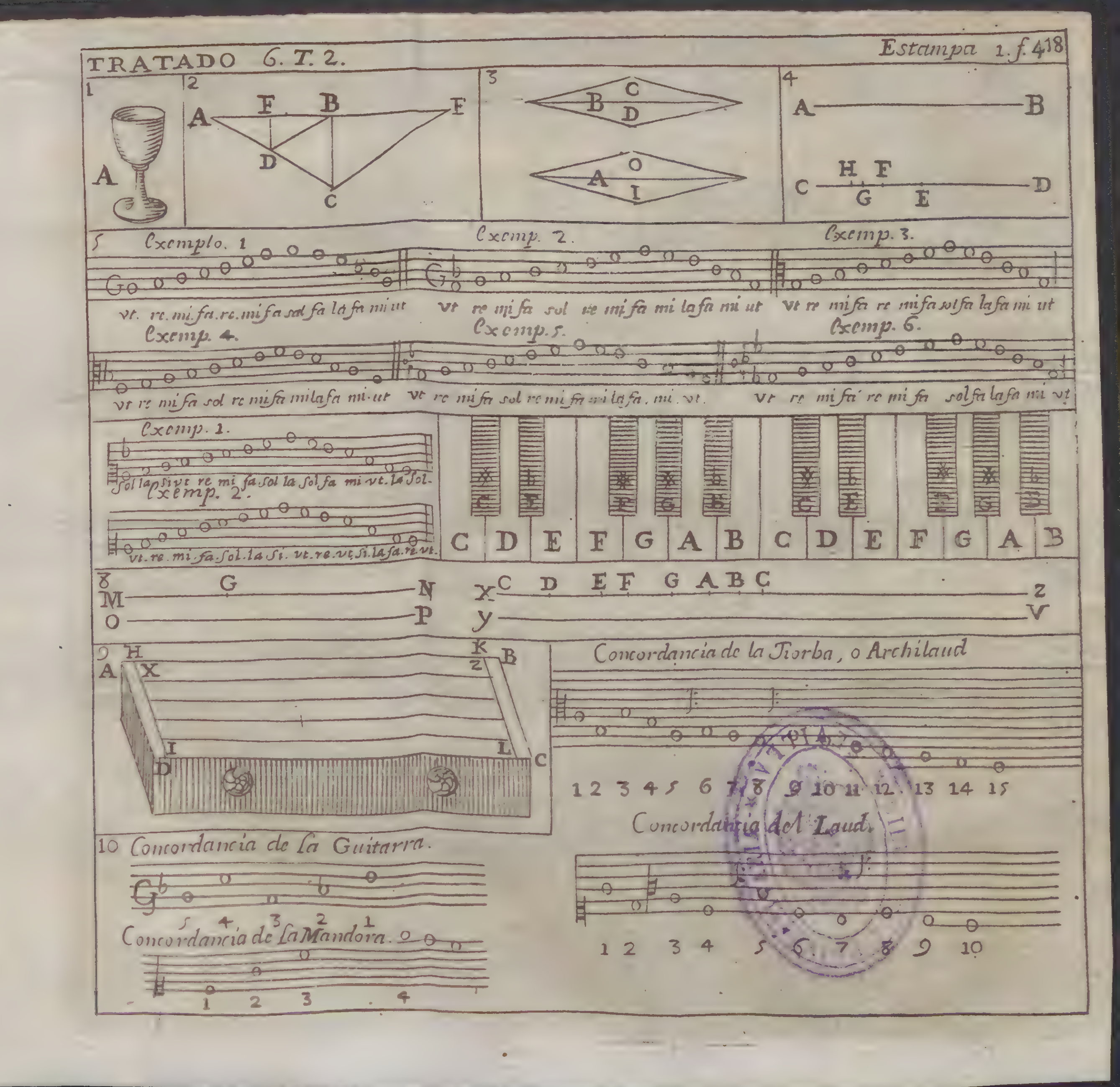
Lo primero, porque las diferencias de las conſonancias, ſegun eſta diviſion à las verdaderas, no es ſenſible, antes bien ſe hallan en ella muchas, que ſe ajuſtan mas à las verdaderas, que las del temple comun del Organo, y que las

las de la Tabla 4. y 5. como lo verà el curioso cotejando vnas con otras.

Primeramente el tono de la Guitarra excede en vn quinto de Coma al tono menor, ò sesquioctavo, y es tambien vn quinto de Coma menos que el del Organo. La Quinta, y Quarta se acercan mas à las verdaderas que en todos los otros temples antecedentes, pues de las 1000. partes de la cuerda, no ay vna de diferencia. Las Terceras se apartan de las verdaderas siete milesimas partes; la Tercera mayor mas aguda, y la menor mas grave; y lo mismo es en las Sextas. A mas de esto, como notò bien Francisco Salinas, muchos intervalos harmonicos, que son disonantes en el Organo, no lo son en este temple de la Guitarra, porque el *Teratono*, intervalo de quatro tonos, que se halla desde C al sustenido de G, es disonante en el Organo, pero en esta disposicion es consonante, porque es lo mismo que la Sexta mayor. Tambien si en el Organo se pusiera el sustenido de D la sol re, el intervalo desde C sol fa vt, hasta el dicho sustenido, seria disono, y no lo es en esta disposicion, por ser lo mismo que la Tercera menor. A mas de estas se hallaràn otras conveniencias en esta disposicion, si atentamente se considera; y no es pequeña hallarse en ella el Circulo Musico, con que si se aplica al Organo con las mismas Teclas ordinarias, se hallarà quanto se puede desear en la Musica.

2. Puedese confirmar lo dicho, porque siendo en esta division las Quintas, y Quartas mas cercanas à las verdaderas que en otros temples; y estando el mayor defecto en las Terceras, y Sextas, que como no tan perfectas, sufren mejor esta diferencia, parece no han de causar desazon alguna al sentido en el Organo; lo que confirmò la experiencia, que segun refiere el Padre Joseph Zaragoza, num. 227. en sus instrumentos Mathematicos, hizo en Madrid, despues de aver experimentado lo mismo en Valencia el citado D. Feliz Falcò, con aprobacion de los Musicos.

Solo puede ofrecerse dificultad en el templar los Organos, Clavicymbalos, y Harpas, segun esta disposicion; pero esto por el Tetrachordo serà facilissimo, como se verà


TRATADO 6. T. 2.
Estampa 1. f. 418
Exemplo. 1
vt. re. mi. fa. re. mi fa sol fa la fa mi ut
Exemp. 2.
vt re mi fa sol re mi fa mi la fa mi ut
Exemp. 3.
vt re mi fa re mi fa sol fa la fa mi ut
Exemp. 4.
vt re mi fa sol re mi fa mi la fa mi. ut
Exemp. 5.
vt re mi fa sol re mi fa mi la fa. mi. vt.
Exemp. 6.
vt re mi fa re mi fa sol fa la fa mi vt
Exemp. 1.
Sol la si vt re mi fa sol la sol fa mi vt. la sol.
Exemp. 2.
vt. re. mi. fa. sol. la si. vt. re. vt. si. la fa. re vt.
C D E F G A B C D E F G A B
C D E F G A B C
Concordancia de la Tiorba, o Archilaud
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Concordancia del Laud.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Concordancia de la Guitarra.
5 4 3 2 1
Concordancia de la Mandora.
1 2 3 4

rà despues; pero por no poder tener siempre à mano este instrumento, singularmente en los Clavicymbalos, y Harpas, parece se podrà reducir à practica este temple con la regla que trae el P. Zaragoza en el lugar citado: dize, que por ser las Quintas, y Quartas en esta division mas proximas à las verdaderas, que las del Organo comun, se podra facilmente proceder por ellas, y continuar el temple en esta forma.

Supongo que se templan las dos Octavas C, C, C, ajustadas estas se templa F vna Quarta sobre C1. y vna Quinta baxo de C2. despues G vna Quinta sobre C1. y vna Quarta baxo de C2. despues de esto se templaràn por Octavas F2. con F1. y G2. con G1. luego desde F2. vna Quinta baxo, se halla el b molado de b1. y vna Quarta inferior à G2. se hallarà D2. que se examinarà por la Quinta de G1. y su Octava inferior serà D1. y la Quinta sobre D1. es A1. y la Quarta inferior à A1. darà el punto de E1. que se examinarà por la Quinta superior de B1. la Octava de E1. darà E2. la Quinta inferior al b molado de B1. dà el b molado de E1. y la Quarta sobre este dà el substenido de G1. y la Quinta inferior à este dà el substenido de G1. y la Quarta sobre este substenido, dà vltimamente el substenido de F. Con esto quedarà ajustada la primera Octava, y por Octavas se podria continuar todo el temple.

PROP. XX. Theorema.

Fabricar la Tabla de las Comas, para conocer quantas entran en qualquier intervalo.

PAra examinar quantas Comas entran en la Octava, y assimismo, en qualquiera de los demàs intervalos harmonicos, segun qualquiera de las divisiones aqui explicadas, aprovecha mucho la Tabla de las Comas que entran en el Diapason, y es la siguiente.

TABLA VII.

De las Comas que entran en el Diapason.

0	10000.000.	2	9754.610.
1	9876.543.	3	9634.183.

4	9515.243.
5	9397.771.
6	9281.749.
7	9167.159.
8	9053.984.
9	8942.207.
10	8831.809.
11	8722.774.
12	8615.086.
13	8508.727.
14	8403.681.
15	8299.932.
16	8197.465.
17	8096.260.
18	7996.306.
19	7897.586.
20	7800.085.
21	7703.788.
22	7608.680.
23	7514.745.
24	7421.971.
25	7330.341.
26	7239.843.
27	7150.462.
28	7062.185.
29	6974.998.
30	6888.887.
31	6803.839.
32	6719.841.
33	6636.880.
34	6554.943.
35	6474.018.
36	6394.091.
37	6315.152.
38	6237.187.
39	6160.185.
40	6084.133.
41	6009.020.
42	5934.835.
43	5861.565.
44	5789.200.
45	5717.729.
46	5647.140.
47	5577.422.
48	5508.565.
49	5440.558.
50	5373.390.
51	5307.052.
52	5241.533.
53	5176.823.
54	5112.511.
55	5049.789.
56	4984.446.

El modo con que ſe fabrica eſta Tabla, es el ſiguiente: Por ſer la proporcion de la Coma, como 81. à 80. ſe forma vna regla de tres: como 81. à 80. aſsi toda la cuerda al conſequente, y ſaldrà la proporcion de la Coma. Supo-niendo, pues, que la cuerda ſe divida en 10000. partes, ſerà la regla de tres: como 81. a 80. aſsi 10000. à 9876. que es la primera Coma. Luego otra vez, como 81. à 80. aſsi 9876. que es el conſequente de la primera Coma, à 9754. que es de la ſegunda, y aſsi en los demàs. Solo ſe ha de ad-

advertir, que para que la Tabla ſalga exacta, en lugar de 10000. ſe ha de tomar 10000.000. y aun para mayor exaccion la Tabla arriba pueſta ſe ha trabajado, ſuponiendo la cuerda dividida en 1000000000000000. y ſe han quitado deſpues las vltimas cifras de mano derecha, que ſobran.

En eſta Tabla ſe vè claramente, que en la Octava ay más de 55. Comas; porque el numero de 55. Comas, es 5049. 789. el qual es mayor que 5000.000. numero de la Octava; y aſsi, la cuerda de 55. Comas, es mas larga; y por conſiguiente, mas baxa que la cuerda de la Octava. La cuerda de 56. Comas, es 4987.446. mas corta que 5000.000. y aſsi es mas que la Octava: De eſta manera ſe pueden cotejar, y averiguar los demàs intervalos.

PROP. XI. Problema.

Fabrica, y vſo del Tetrachordo.

EL Tetrachordo, como el miſmo nombre declara, es vn inſtrumento compueſto de quatro cuerdas: ſu forma es como repreſenta la figura 9. ſu longitud vna vara, poco mas, ò menos, para que ſu cuerda XZ ſe pueda dividir en 10000. ò por lo menos en 1000. partes; lo qual ſe executarà facilmente formando vn Pitipie igual à la longitud de la ſobredicha cuerda.

Sobre eſte inſtrumento ſe tiraràn quatro lineas paralelas, como ſe vèn en la figura; y ſi pareciere, ſe podràn tirar cinco para poner en ellas los intervalos harmonicos de las Tablas antecedentes, Tercera, 4.5.6.7. cada vno en ſu propria linea. El modo de graduarle, es el ſiguiente.

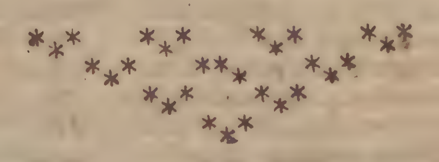
Tomenſe del Pitipie arriba dicho, vna por vna las conſonancias que ſe quiſieren, començando ſiempre del punto C; eſtas ſe paſſaran al inſtrumento, y pueſto el vn pie del compàs en z, con el otro ſe ſeñalarà el punto de la conſonancia; ſeñalados los puntos de todas, ſe pondràn en ellos las notas C, D, &c. con las de los b molados, y ſubſtenidos à quien pertenecieren. Pueſta la primera Octava, ſe pondrà la ſegunda, tomando la mitad de los numeros, que à

cada intervalo señalan las Tablas; y la Tercera, tomando la quarta parte, y quedarà graduado el Instrumento.

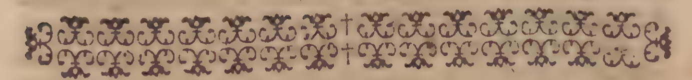
Sobre estas lineas, se pondràn quatro cuerdas, que serà mejor sean de alambre, ò azero: estas se templaràn vnisonas, con dos puentecillas fixas en LK, HI, y sus clavijas de hierro, como en la Harpa. El vso de este Instrumento, es el que se sigue.

1. Para templar vn Organo, Clavicymbalo, ò Espineta, segun qualquiera de las disposiciones antecedentes, se templarà aquella cuerda propria de la division, que se quiere executar, y se ajustarà vnisona con el punto ordinario, que suelen tener los instrumentos en C sol fa vt; de suerte, que la cuerda entera sea vnisona con la primera Tecla C; despues se irà mudando vna puentecilla por los puntos del Tetrachordo D, E, F, &c. à los quales se han de ajustar vnisonas las flautas del Organo sus correspondientes, y de esta suerte se concluirà con facilidad el temple que se quisiere.

Con este instrumento se examina la harmonia, que haze qualquiera intervalo, poniendo la puentecilla en el punto que se desea, y tocando aquella porcion de cuerda, juntamente con la entera, que està a su lado. Puedese tambien experimentar el efecto, que hazen quatro vozes dispuestas harmonicamente, segun qualquiera de las sobredichas divisiones: como para percibir la harmonia que hazen las vozes, Vt, Mi, Sol, Fa, que son Tercera, Quinta, y Octava, se dexarà libre la primera cuerda XZ; en la segunda, se pondrà la puentecilla movible en E, y harà Tercera mayor con la primera; en la tercera cuerda se pondrà en G, y harà Quinta en la primera; y con la quarta se colocarà en C, para la Octava; y tañendo todas las cuerdas juntas, se oirà la consonancia que se desea, y assi de las demàs.



LI-



LIBRO III.

DE LA MUSICA ORGANICA, ò Inſtrumental.

CAſi todo lo dicho en el Libro antecedente ſe ordena à la recta diſpoſicion de los Inſtrumentos muſicos, cuya explicacion ſerà el empleo de eſte Libro, en donde ſolamente trato de lo que es meneſter para la inteligencia de ſu diſpoſicion harmonica, dexando lo que pertenece à ſu fabrica material, como menos perteneciente à nueſtro inſtituto.

A tres generos ſe reducen los Inſtrumentos muſicos. Los primeros ſon los que ſe componen de cuerdas, que, ò heridas con los dedos, ò incitadas con el Plectro, hazen vna ſuave harmonìa, como ſon las Harpas, Clavicymbalos, Eſpinetas, Guitarras, Violònes, Lyras, y otros inumerables. Los ſegundos, ſon los que animados con el viento producen ſu ſonido, como ſon los Organos, Trompetas, Clarines, Cornetas, y otros ſemejantes. Los terceros ſon los pulſatiles, que con golpes de otro cuerpo, cauſan ſu harmonìa, como ſon las Campanas, Atambores, y otros de eſte genero.

CAPITULO I.

DE LOS INSTRUMENTOS COMPUESTOS de cuerdas.

ANtes de paſſar à la explicacion de eſtos inſtrumentos en particular, advierto, que en las cuerdas que les componen, ſe han de atender quatro coſas, es à ſaber, longitud, tenſion, craſicie, y mate-

ria, cada vna de las quales es suficiente para variar el sonido en razon de grave, y agudo, y assi, la cuerda mas larga, haze por si el sonido mas grave que la corta; la menos tensa, mas grave que la mas tensa; la mas gorda, mas grave que la mas delgada; y las de materia mas pesada, suenan mas baxo que las menos pesadas; lo qual se ha de entender, siendo en lo demàs iguales; porque combinando, y concurriendo vnas circunstancias con otras, resultan diferentes efectos, segun fuere diferente el concurso de las calidades referidas; y para que los instrumentos queden mas prontamente ajustados, y salgan mas proporcionados al vso comun, suelen concurrir en sus cuerdas diferentes circunstancias de las sobredichas; y assi vemos, que en la Harpa, las cuerdas graves son, no solo mas largas, sì tambien mas gordas, y menos tensas; y al contrario las agudas, con que se ajustan con mayor facilidad. La razon natural de lo sobredicho es mas propria de otro tratado, por lo que la omito en el presente, singularmente no siendo menester para la inteligencia de lo que se ha de tratar.

PROP. I. Theorema.

Explicase la disposicion de los Clavicymbalos, Espinetas, Manuchordos, Harpas de dos ordenes, y otros semejantes.

EN estos instrumentos se descubre con mayor claridad el Systema musico, y no tenemos aora que añadir cosa alguna sobre lo que diximos en el lib. 2. cap. 2. donde quedan explicadas diferentes disposiciones de Teclados, y divisiones de la Octava, que pueden con acierto ponerse en todos estos instrumentos, dandoles el temple por el Tetrachordo.

PROP. II. Problema.

Explicase la disposicion del Laud, Tyorba, Cytara, Guitarra, Mandora, y otros.

DE esta especie de instrumentos ay muchas diferencias en varias Naciones; de suerte, que son casi innumera-

rables ; consiste su diversidad en constar de mas , ò menos cuerdas , y en la diferente concordancia , y temple que tienen vnas con otras. Omito la diferente figura , y disposicion de sus caxas , como cosa que haze poco al tratado presente : Convienen todos en la division del Manubrio en diferentes Trastes ; y assi explicarè brevemente la methodo de entrastarles , y la concordancia , ò temple de las cuerdas que les componen.

Las divisiones que forman los Trastes , corresponden à las Teclas del Organo , y sirven para el mismo efecto; porque assi como estas dàn la division de la Octava , y Monochordo , segun qualquiera de las divisiones que expliquè en el Libro antecedente , assi los Trastes en estos instrumentos dàn las mismas divisiones, segun la disposicion que en ellos se quiere colocar , si bien , para escusar la dificultad del tañer el instrumento dividido , segun otras divisiones, se contentan comunmente los musicos con poner en los Trastes la division de la Octava en 12. partes iguales , que expliquè en la Prop. 20. del Libro passado.

El modo de entrastar qualquiera de estos instrumentos es facil por el Tetrachordo , valiendose de sola aquella cuerda , que en este corresponde à la division que se quisiere colocar , y poniendo en el instrumento que se entrasta vna sola cuerda. Esta , pues , se templarà vnisona con la del Tetrachordo ; despues se ajustarà vna puentecilla movible sòbre el sustenido de C , y se pisarà con el dedo la de la Guitarra , hasta que diga vnisona con la del Tetrachordo ; y alli se atarà la cuerda que determina el primer Traste : despues subiendo la puentecilla al siguiente punto en el Tetrachordo , se determinarà el segundo Traste , y assi de los demàs.

Tambien se puede entrastar sin el Tetrachordo , dividiendo vna linea recta , igual à la longitud de las cuerdas, por qualquiera de las Tablas 3. 4. 5. 6. 7. segun la disposicion que se quisiere ; y estas divisiones passadas al instrumento , contando siempre desde el puente àzia arriba , determinaran los Trastes.

De qualquiera de los sobredichos modos se puede colocar

locar en el instrumento, la division del Diapason que se quisiere; pero con el siguiente sola la division de la Octava en 12. partes iguales: Dividase toda la longitud de la cuerda en 18. partes iguales; y tomando las 17. desde la puente, se pondrà alli el primer Traste: Dividase segunda vez lo restante de la cuerda desde el primer Traste hasta la puente en 18. partes iguales; y tomando las 17. quedarà determinado el segundo Traste: asimismo, dividase el residuo del segundo Traste hasta la puente en 18. partes iguales; y las 17. daràn el tercero; y de este modo se proseguirà hasta que se ayan puesto todos. Fundase esto en que el semitono de la Guitarra, ò division de la Octava en 12. partes iguales, viene à ser la de 18. à 17. luego con la regla sobredicha quedarà dividida la Octava, ò Diapason del instrumento en 12. semitonos iguales. Suelense poner en la Guitarra, à lo mas, nueve Trastes, como tambien en la Mandora: en otros instrumentos se ponen algunos mas, segun la idèa, y estilo de cada Nacion.

El Laud, Archilaud, ò Tyorba, constan de 10. à 14. cuerdas: la Cytara, Guitarra, y Mandora, de cinco, ò seis; esto es lò ordinario, porque en estos instrumentos ay gran variedad, como tengo dicho. Duplicanse todas las cuerdas, menos la que llamamos, *Prima*: El temple de las cuerdas de estos instrumentos, tomadas enteramente son los expressados en la fig. 10.

PROP. III. Theorema.

Explicase la disposicion de los Violònes, y Violines.

VIolònes, y Violines son vnos instrumentos bien conocidos, que se tañen con el Plectro, ò arco compuesto de cerdas. Trata de ellos difusa, y eruditamente el Padre Mariano Merseno, à quien remito al curioso Lector. Ay tambien variedad en estos instrumentos, porque vnos constan de quatro cuerdas, otros de seis, y algunos de 12. con el de 12. cuerdas se tañen tres, quatro, y cinco vozes juntas, y es proprio para tonadas graves, y tristes. Los Violònes pequeños no tienen Trastes; los Violònes mayores

res algunos les tienen; y ſe colocaràn por las reglas dadas para otros inſtrumentos en la Propoſ. antecedente. Los que carecen de Traſtes, por no tener determinada diviſion de la Octava, tienen perfectamente las conſonancias deſde qualquiera punto: de ſuerte, que el Muſico dieſtro, afinando con perfeccion los puntos, puede de qualquiera formar los intervalos, y tonos que guſtare, y perficionar el Circulo muſico. La concordancia de ſus cuerdas, tomadas enteramente deſpues del temple, es como ſe vè en la fig. 11.

PROP. IV. Theorema.

Explicaſe la diſpoſicion de la Trompa marina.

AY otro inſtrumento, que ſe tañe con Plectro, à que llaman comunmente, *Trompa marina*, por imitar con gran propriedad el ſonido de vna Trompeta, ò Clarin. Conſta de vna ſola cuerda, ò bordon largo, debaxo del qual, al cabo inferior ſe pone vna puentecilla movible, de tal ſuerte, que pueda moverſe, y temblar quando ſe tañe la cuerda; y para tañerla, ſe le arrima el dedo pulgar de la mano izquierda, de ſuerte que no la apriete, ni comprima, e hiriendo con el arco la parte de la cuerda, que eſtà entre dicho dedo, y la clavija, haze vn ſonido muy ſemejante al del Clarin: no tiene diviſion de Traſtes, por no averſe de apretar ſobre ellos la cuerda; pero ſuelen ponerſe en el manubrio las diviſiones competentes para tañer con mayor acierto. Eſte inſtrumento nos dà mucha luz para lo que hemos de tratar en el Capitulo ſiguiente; y aſsi me detendre mas en ſu explicacion.

El dedo, que aplicado à la cuerda la toca ſolamente ſin comprimirla, de tal manera la divide en dos partes, que no impide el movimiento de alguna de ellas, antes bien vibran entrambas al miſmo tiempo, en que el arco hiere la vna; de que ſe ſigue neceſſariamente, que no ſolo ſuena la parte herida del arco, sì que tambien la otra reſuena, haziendo temblar la puentecilla con ſus vibraciones; y por eſta cauſa ſe coloca eſta, de tal ſuerte, que pueda con facilidad parcipar el temblor de la cuerda; pero es meneſter

ad-

advertir, que no se mueve toda la cuerda con vna misma vibracion, sì que cada vna de las dos partes vibra con movimiento proprio, y proporcionado à su longitud, sirviendo la aplicacion del dedo, para dividir la cuerda en dos partes, que vibran, y suenan cada vna de por sì; y segun la proporcion que tuvieren estos segmentos, seràn sus sones consonos, ò disonos, agradables, ò desagradables.

De estos dos sonidos, aquel es el principal que mueve mas al sentido; y es el que proviene del segmento de la cuerda herido del arco, porque el otro solamente se mueve, y resuèna por la continuacion que tiene con el primero, y sirve para causar mayor harmonìa, junto con el principal, como tambien à vna sola Tecla del Organo, corresponden diferentes flautas, que forman diferentes puntos; y solamente percibe el sentido el sonido de la principal, sirviendo las demàs precisamente para causar mayor harmonìa.

PROP. V. Problema.

Dividir el Monochordo en la Trompa marina.

LA division de la cuerda en este instrumento, se haze en la forma siguiente. Vease la fig. 12. que representa la Trompa marina, en quien la cuerda es AB, debaxo de la qual, sobre el mismo instrumento, tirese la linea recta AB, que supongo dividida en 60. partes iguales. Dividase, pues, primeramente en C, en dos partes iguales; y serà cada vna de ellas 30. y por consiguiente seràn ambos segmentos vnisonos; pero el sonido de AC, que es el que mas se percibe, y à quien hiere el arco, arrimado el dedo à C, si se compara con toda la cuerda sonarà Octava.

Dividase la linea AB en F, de tal suerte, que AF sea vn tercio; y por consiguiente, conste de 20. partes: luego FB constarà de 40. y ambas entre sì estaràn en Octava, por tener razon dupla; pero el sonido de AF, que es el principal, comparado con el de AC, formarà Quinta, por ser AC à AF, como 3. à 2. ò como 30. con 20.

Dividase yà AB en G, de manera, que AG, sea la quarta parte de AB, y serà el segmento GB, triplo del segmento

to AG, con que ambas partes concordaràn en duodezima; pero comparando el ſegmento AG con toda la cuerda AB, que es quadrupla de dicho ſegmento, eſtarà ſu ſonido ſobre el de toda, dos Octavas; luego ſubirà ſobre el antecedente AF vna Quarta.

Sea el ſegmento AH 12. y ſerà HB48. luego eſtos dos ſegmentos eſtàn en razon quadrupla, y ſonaràn dos Octavas, mas comparando AH12. con AB60. ſe hallarà eſtàr en la razon de 1. à 5. que es vna tercera mayor ſobre dos Octavas; luego forma vna Tercera mayor ſobre AG.

Sea AI de 10. partes, con que IB es 50. luego eſtàn en razon de 5. à 1. que es Tercera mayor ſobre el Diſdiapaſon: El miſmo ſegmento de AI, con toda la cuerda AB, tiene la razon de 1. a 6. que es Quinta ſobre dos Octavas: luego eſtà en Tercera menor ſobre AH.

Sea AK 7. y medio, y la reſtante BK 52. y medio; y ſe hallaràn los ſegmentos en razon de 7. à 1. intervalo ſonoro, ſegun dixe en el lib. 1. en el Corolario de la Prop. 22. y eſtando toda la cuerda AB con el ſegmento AK, en razon de 8. à 1. eſtaràn ſus ſonidos en tres Octavas; y por conſiguiente el ſonido de AH ſobre el de AI, formarà vna Quarta.

Sea el ſegmento AL 6. y dos tercios; y LB 53. y vn tercio, y eſtaràn en razon de 8. à 1. que es conſonancia de tres Octavas; y ſiendo toda AB 60. à AL 6. y dos tercios, como 9. à 1. eſtarà el ſonido de AL vn tono mayor ſobre tres Octavas; y ſobre el ſonido de AK vn tono mayor.

Sea el ſegmento AM 6. y ſerà el reſiduo MB 54. y eſtaràn los ſegmentos en razon de 9. à 1. y ſonaràn vn tono ſobre tres Octavas: mas comparando la cuerda entera AB con AL, ſeràn como 10. à 1. que es Tercera mayor ſobre tres Octavas; y por conſiguiente, ſerà el ſon de AM vn tono menor ſobre el ſon de AL.

Sea el ſegmento AN 5. y 5. vndezimas; y NB54. y 6. vndezimas; y eſtaràn en razon de 10. à 1. y ſu conſonancia ſerà Tercera mayor ſobre tres Octavas; y toda AB à AN,

AN, serà como 11. à 1. que es poco mas que Quarta sobre tres Octavas; con que sube sobre AM vn semitono mayor.

Sea el segmento AO 5. y vn septimo; y OB 54. y 6. septimos; y tendràn la razon de 10. y 2. tercios à 1. que es Quarta sobre tres Octavas; pero cotejando toda la cuerda AB, con el segmento AO, se hallaràn ser como 11. y 2. tercios à 1. que es casi Quinta sobre tres Octavas: luego sube vn tono sobre la cuerda AN.

Ultimamente el segmento AP sea 4. y 8. dezimas tercias; y PB 55. y 5. dezimas tercias, que es la razon de 12. à 1. Quinta sobre tres Octavas; mas toda la cuerda AB con AP, es como 13. à 1. Sexta mayor sobre tres Octavas; con que AP està vn tono sobre AO.

Estas son las divisiones ordinarias, y el orden de los intervalos en este instrumento, y se podian hallar aun otras consonancias: Todas se descubren à vna vista en la siguiente Tabla, donde para mayor precision supongo la cuerda AB dividida en 1000000. partes.

TA-

TABLA de la diviſion, y conſonancias de la Trompa marina.

Diviſion.	Segméto menor.	Segméto mayor.	Razó de los ſegmentos.	Conſonancias de los ſegmentos.	Razó de toda có el ſegm. menor.	Conſonancias del ſegméto menor con toda la cuerda.
1	20000	50000	1 à 1	Vniſono.	2 à 1	Octava.
2	33333	66667	2 à 1	Octava.	3 à 1	Duodezima.
3	25000	75000	3 à 1	Duodezima.	4 à 1	Dos Octavas.
4	20000	80000	4 à 1	Dos Octavas.	5 à 1	Terc.may.ſobre 2.Octav.
5	16666	83334	5 à 1	Terc.may.ſobre 2.Octav.	6 à 1	Quinta ſobre 2. Octavas.
6	12500	87500	7 à 1	Quarta ſobre 2. Octavas.	8 à 1	Tres Octavas.
7	11111	88889	8 à 1	Tres Octavas.	9 à 1	Tono ſobre 3. Octavas.
8	10000	90000	9 à 1	Tono ſobre tres Octavas.	10 à 1	Terc.may.ſobre 3.Octav.
9	9090	90910	10 à 1	Terc.may.ſobre 3.Octav.	$10\frac{2}{3}$ à 1	Quarta ſobre 3. Octavas.
10	8571	91429	$10\frac{2}{3}$ à 1	Quarta ſobre 3. Octavas.	$11\frac{2}{3}$ à 1	Quinta ſobre 3. Octavas.
11	7692	92308	12 à 1	Quinta ſobre 3. Octavas.	13 à 1	Sexta may.ſobre 3.Octav.

CA-

CAPITULO II.

DE LOS INSTRUMENTOS Pneumaticos.

AViendo tratado de los inſtrumentos de cuerdas, ſiguese el tratar de los inſtrumentos Pneumaticos. Eſtos ſon los que animados con el viento cauſan la variedad de ſones que experimentamos; como el Clarin, Piſano Militar, Chirimias, Cornetas, Baxònes, Organos, y otros ſemejantes, cuya explicacion Phyſico-Mathematica và en las Propoſiciones ſiguientes.

PROP. VI. Theorema.

Explicanſe los intervalos, y ſaltos del Clarin, y demás Fiſtulas.

COnſta por experiencia, que qualquiera Fiſtula, ſingularmente ſi es larga, en la formacion de ſus intervalos, và ſubiendo por ſaltos, ſegun es mas, ò menos vehemente la inſpiracion, ò aliento con que ſe tañe. El inſtrumento que con mayor evidencia manifieſta eſta verdad, es el Clarin, que por ſer de mayor longitud, puede expreſſar todos los ſaltos. Supongamos, pues, vaya ſubiendo por grados la vehemencia del aliento que le anima; y lo primero de todo ſubirà el ſonido vna Octava por ſalto: ſi la inſpiracion es algo mas fuerte, ſubirà vna Quinta; luego vna Quarta; con poco mas que el aliento ſe esfuerze, ſaltarà vna Tercera mayor: luego vna Tercera menor; deſpues vna Quarta; y aumentando deſpues la fuerza del aliento, irà ſubiendo la voz del Clarin, formando los puntos re, mi, fa, ſol, la: y la mayor maravilla es, que los puntos intermedios en los ſaltos ſobredichos, no ſe podran jamas formar, aunque ſe modere de qualquiera manera el aliento. Veanſe los ſaltos del Clarin en la fig.13.

En

En las otras Fistulas, como son Chirimias, y sus semejantes, si se tapan todos los agugeros, y se alienta moderadamente, formaràn vn sonido, y alentando con algo mayor violencia, subirà el sonido vna Octava por salto, sin que se puedan formar los puntos intermedios; soplando con alguna mayor fuerça, subirà vna Quinta; y algunas vezes con mayor fuerça, subirà mas vna Quarta, que todo son dos Octavas sobre el punto primero; pero por ser mucho mas cortas que el Clarin, no pueden subir à formar los otros puntos, que este forma; lo mismo se experimenta en las Fistulas del Organo.

Esto es lo que el R.P.Merseno propone à los Philosofos, y Mathematicos, como Problema indisoluble, por ser sumamente dificil dar la razon cabal, porque faltan las Fistulas por estos intervalos, sin poder formar los puntos intermedios.

Para dàr la razon, que mas parece satisface, supongo lo primero, que quando el Clarin (y lo mismo digo de las demàs fistulas) se inspira con alguna fuerça bastante para formar la voz, todo el ayre que està incluido en el Clarin, vibra como si fuesse vna cuerda tan larga como es el Clarin; y cada vna de sus vibraciones tiene su determinada duracion, segun es mayor, ò menor su longitud: que el ayre se mueva con vibraciones, es constante, porque tañendo las Fistulas mayores del Organo, se percibe vn temblor en el enmaderamiento del mismo Organo, causado sin duda del temblor del ayre, por no aver otro cuerpo que pueda imprimir aquel impulso. Que la duracion de cada vibracion, se proporcione con la longitud del Clarin, se prueba, porque acortandole, haze el son mas agudo; y lo mismo sucede si se abre algun agugero, que virtualmente es acortarle; lo que es señal evidente de que todo el ayre vibra como si fuesse vna cuerda; pues assi como las cuerdas, acortandolas, hazen el sòn mas agudo, assi las Fistulas con la misma proporcion que se acortan, suben su sonido.

Supongo lo segundo, que qualquiera cuerda tensa haze sus vibraciones tan ajustadas à la duracion que requiere su longitud, que perseverando en el mismo grado de tension, y en la misma longitud, no puede moverse con ma-

yor celeridad; y es la razon, porque perseverando siempre vna misma tension, como se supone, persevera vna misma causa motiva, luego el movimiento es el mismo; y como la longitud sea la misma, el espacio que ha de correr la cuerda para hazer su vibracion, es el mismo; y por consiguiente, el tiempo que empleará en ella tambien, será el mismo; pero acortando la cuerda, se acortará tambien el espacio que ha de correr; y assi le correrá en menos tiempo, y será mas breve la duracion de su vibracion.

Esto supuesto, se explican facilmente los saltos del Clarin, y demas Trompetas, y fistulas; porque quando aumentamos la fuerça del aliento, necessitamos al ayre, que està dentro la fistula, à moverse con mayor velocidad; y como aquella cuerda del ayre no pueda moverse con mayor velocidad, conservando toda su longitud por la razon sobredicha, se halla necessitada para executar dicho movimiento à dividirse en dos partes, las quales hazen de por sì sus vibraciones; y como cada vna de ellas sea mas pequeña que toda la cuerda, tambien sus vibraciones son mas aceleradas que las que hazia la cuerda entera.

Los segmentos de esta division no pueden ser tales, que tengan contrarios movimientos; porque de esta suerte el de la vna extinguiria el movimiento de la otra; de que se sigue hazerse necessariamente esta division en partes, cuyas vibraciones sean brevemente conmensurables; y por consiguiente en partes consonas, necessitando à esto la misma impossibilidad de vibrar toda la cuerda entera con aquel impulso.

De estas partes de la division, aquella que està inmediata à la boca del que tañe, se mueve con vibraciones mas sensibles, participando la otra que està mas apartada, solamente vn leve temblor, al modo que dixe en la Propos. passada, sucede en la cuerda de la Trompa Marina; y esta es la causa de percibirse mucho mas su sonido, como si estuviesse sola; y por la misma razon, aumentando la fuerça del aliento, aquella parte del ayre que està mas proximo al motor, que es la boca que le inspira, es excitada à movimiento mayor, y mas velozes vibraciones; y por consiguien-

guiente dividiendose la cuerda para poderlas executar, la porcion mas corta es la que està inmediata à la boca del que entona; y la que haze mas frequentes, y velozes sus vibraciones.

Siendo esto assi, la primera division de la cuerda del ayre, que se haze inspirando con mas fuerza, es en dos partes iguales; de que se sigue han de sonar ambas vna Octava sobre el sonido que antes formaba toda la cuerda entera. Que esta division sea la primera que se haze aumentando la fuerza del aliento de grado en grado, se prueba, porque es la division mas facil, y que ha menester menos impulso, como lo vemos en la division de vn palo de igual crasicie, y firmeza, que tomando sus extremidades con las manos, mas facilmente le rompemos por medio, que por cerca de vn extremo. Compruebase tambien esto mismo con la experiencia que atestigua Galileo, que bruñendo vna lamina de alatòn, la veia vibrar toda sensiblemente, y formar su sonido; y aumentando el movimiento, advirtiò, que la vibracion antecedente se dividia en dos, cada vna en la mitad de la lamina, y entonces percibia el son vna Octava mas alto, lo que persuade todo lo dicho.

Inspirando despues el Clarin con mas vehemencia, necessitamos la cuerda del ayre à otro movimiento vibratorio mas velòz; y esta para poderse mover con mas velocidad, se divide en otras dos partes consonas, las quales tienen entre si la razon de 2. à 1. de suerte, que la mas corta serà la que mas vivamente suena; y es la mas cercana al motor, que es la boca del que tañe; y estando estas partes entre si en la razon de 2. à 1. estarà toda la cuerda con la parte menor, que es la que forma el sonido principal, en razon de 3. à 1. luego formarà vna duodezima sobre el punto primero de toda la cuerda; y vna Quinta sobre el sonido antecedente: y de esta suerte aumentando por grados la fueza del aliento, se iran haziendo las mismas divisiones que en la Trompa manual, ò Marina, segun dixe en la Proposicion passada, y por consiguiente se iran formando los saltos, segun los intervalos de dicha Trompa, sin poderse formar los puntos intermedios, por la impossibili-

dad de dividirse la cuerda del ayre en partes no consonas; y de movimientos opuestos.

PROP. VII. Theorema.

Explicase la formacion de los intervalos de las Fistulas, que constan de tres agugeros.

SOn casi innumerables las diferencias que ay de estos instrumentos, y son bien vulgares, y conocidos: convienen todos en tener en su longitud diferentes agugeros, que cerrandoles, y abriendoles con los dedos, forman diversos puntos, è intervalos graves, ò agudos, segun los agugeros que se cubren, ò descubren: y es la razon, porque como hemos dicho, el son de estos instrumentos consiste en las vibraciones del ayre, que vibra como si fuera vna cuerda de igual longitud à la de la Fistula, ò cañon que se tañe; y en quien està incluìdo: luego acortandose el instrumento, serà mas corta la sobredicha cuerda, harà en menos tiempo sus vibraciones, y serà tanto mas agudo su sonido, quanto fuere mas corta; y no aviendo duda en que lo mismo es agugerar el instrumento, que acortarle, por hallar por el agugero desembarazada el ayre su salida; luego descubierto el agugero, serà el sonido mas agudo, y tanto serà mas agudo, quanto mas arriba se abrirà el agugero.

Dificultase aora como puede vna Fistula con solos tres agugeros, subir de punto en punto toda vna Octava, y aun vna duodecima: pero satisfacese la dificultad facilmente, supuesta la doctrina de la Prop. antecedente de los saltos de las Fistulas. Suponiendo primeramente, que en esta especie de Fistulas es sumamente dificil, y aun casi impossible formar el punto infimo, correspondiente al infimo de la Trompa Marina [5.] por averse de inspirar para su formacion tan lentamente el ayre, que apenas es perceptible, con que cerrados todos los agugeros, y dando el aliento como se acostumbra, ya se supone hecho el primer salto, que como dixe en la Prop. 6. es vna Octava.

Supongamos, pues, que esta primera voz fundamental, que

que se forma cerrados todos los agugeros, sea *Vt*; perseverando con la misma intension de aliento, descubrase el primer agugero, que es el infimo, y subirà la voz vn tono, y serà *Re*; abiertos los dos agugeros, entonarà *Mi*; abiertos los tres, entonarà *Fa*; buelvanse à cerrar los tres, y esfuerzese mas el aliento; y segun lo dicho en la Prop. passada, saltarà el sonido vna Quinta sobre el *Vt* fundamental; y por consiguiente entonarà *Sol*, vn tono sobre el *Fa*, que antes diximos; y con la misma intension de aliento, descubriendo el primer agugero, se oirà el *La*, ò *Re* siguiente: abriendo los dos, entonarà *Mi*; y abriendo los tres, entonarà el siguiente punto entero, que es el *Mi* de b fa b mi; pero cerrando el primero de arriba totalmente; y dexando el de mas abaxo medio abierto, se entonarà el *Fa*: cierrense otra vez todos, y esforzando mas el aliento, saltarà vna Quarta sobre el sonido que formò, quando antes se cerraron los tres; luego serà vna Quarta sobre Quinta; y por consiguiente vna Octava sobre el *Vt* fundamental; y bolviendo aora successivamente à abrir los tres agugeros, entonarà *Re*, *Mi*, *Fa*; luego vna Fistula con solos tres agugeros, entona sin interrupcion con los saltos explicados *Vt*, *Re*, *Mi*, *Fa*, *Sol*, *Re*, *Mi*, *Fa*, *Re*, *Mi*, *Fa*.

PROP. VIII. Theorema.

Explicase la formacion de los intervalos en las Fistulas de seis agugeros.

LAs Fistulas mas largas, como Chirimias, Cornetas, y otras semejantes, constan de seis agugeros, y entonan subiendo de punto en punto hasta dos Octavas, por la misma razon que dixe en la Prop. antecedente en la Fistula de tres agugeros.

Suponganse, pues, cerrados con los dedos los seis agugeros de la Fistula, y en esta disposicion, por estàr entera, sonarà el punto fundamental *Vt*; abriendo despues el primero, entonarà *Re*; abiertos el primero, y segundo, se oirà *Mi*; abiertos los tres, entonarà *Fa*; los quatro, *Sol*; los cinco, *Re*; los seis, *Mi*; y cerrados todos, è inspirando mas fuerte, en-

entonarà por el salto ordinario vna Octava sobre el *Vt* fundamental, y serà *Fa*; y abriendo con el mismo orden los agugeros, se entonarán los puntos de la segunda Octava.

La distancia de los agugeros entre sì, se determinarà por vna de las Tablas de la division del Monochordo: lo mas proporcionado serà determinarlas por la Tercera, que es propria del Organo, tomando las distancias, que dà la Tabla, desde la lengua, ò ventanilla del instrumento àzia baxo, y abriendo allì el agugero. Los puntos que se ponen en estos instrumentos son del orden Diatonico, porque los sustenidos, y b molados, se forman descubriendo solamente la mitad del agugero, y de otras maneras.

Se ha de procurar tambien, que la Fistula, cerrados todos los agugeros sea vnisona con algun punto natural del Organo; y se ajustarà a esse punto, si està sobrado baxa, abriendo algunos agugeros, los quales no sirven de otro que de acortar la dicha Fistula, para que se ajuste al punto natural del Organo; y assi quando se tañe, jamàs se haze caso de ellos.

PROP. IX. Problema.

Explicase la Symmetria que se les suele dàr à las Flautas del Organo.

ES el Organo, sin duda alguna, vna maquina harmonica, que excede en perfeccion à quantos instrumentos musicos ha inventado el arte, pues, ni reconoce igual en la variedad, y gravedad de su harmonia, ni tiene segundo en la combinacion numerosa de sus vozes: Componese de gran multitud de Flautas, que repartidas en diferentes ordenes, y animadas con el viento, producen vna maravillosa diferencia de sonidos. Veniasenos à la mano tratar de la fabrica material de esta maquina admirable; pero esta, quanto es facil de entender registrandola con los ojos, es dificil de expressar, y declarar con figuras; y assi, remitiendome en esta materia al P. KirKer en el tomo 1. de su Musurgia, lib. 6. cap. 3. me contentarè solamente con tratar lo

mas

mas cientifico; y ſupueſto que el Syſtema del Organo, y diviſion de ſu Monochordo ſe explicò en el libro paſſado, baſtarà aora declarar la Symmetria de ſus Cañones, ò Flautas, y la proporcion que ſe les debe dàr, para que facilmente ſe ajuſten al ſobredicho Syſtema.

Varias maneras de Cañones ay en el Organo; en quanto à la materia, vnos ſon de madera, otros ſon de plomo, y eſtaño mezclados en cierta proporcion; en quanto à la forma, vnos ſon Cilindros, ò Paralelepipedos ſeguidos, llamados propriamente *Flautas*; otros tienen forma de Trompetas, è imitan ſu voz; vnos remedan las vozes de las aves, otros las vozes humanas; vnos tienen la voz muy clara, y ardiente; otros mas parda, y obſcura, con cuyas combinaciones forma el dieſtro Organiſta apacibles, y guſtoſas mixturas.

Las Flautas ſon en dos maneras, vnas *abiertas*, y otras *cerradas*, porque ſi bien todas convienen en eſtar abiertas, tanto por H, (fig. 14.) por donde reciben el ayre, como en la ventanilla GI, que ſirve para la formacion de la voz; pero la parte ſuperior F en vnas eſtà mas abierta, y en otras cerrada. Para determinar la Symmetria, tanto de las Flautas abiertas, como de las cerradas, ſupongo lo primero, que la pyramide conica GHI, no ſe cuenta en la longitud de la Fiſtula, por quanto eſta no ſirve de otro, que de llevar el viento, y conducirle à la Flauta, que es GF, el qual, encontrando con la lengua, ò ſuperficie eſquinada, y obliqua que ay en la ventanilla, recibe el movimiento apto para el ſonido; con que la longitud de la Fiſtula, es ſolamente GF.

Supongo lo ſegundo, que por latitud de las Flautas ſe ha de enterder ſu circunferencia, porque la proporcion de ſu longitud, y latitud ſe entiende mejor en la plancha paralelogramma eſtendida, antes de doblarla para formar la Fiſtula, como ſe vè en AGCD, fig. 15. Eſta proporcion de la longitud de las Fiſtulas con la latitud, no guarda todo rigor Mathematico, antes bien, como advierte el P. Miliet en la Propoſ. 13. ſi todas guardaſſen vna miſma razon, ſaldrian las baxas ſobrado ardientes; y aſsi, à eſtas ſe les debe

dàr menor latitud, respecto de su longitud, que à las mas altas. Esto supuesto, lo que se suele observar en la practica, es lo siguiente.

A las Fistulas abiertas dàn de ancharia algunos Factores los dos quintos de la largaria; otros, tres quintos; otros, vn quarto de la largaria, donde se vè la variedad que ay en esto; y lo cierto es, que qualquiera de estas proporciones, solo sirve para que no salgan muy distantes del punto, que deben tener, y se ajusten despues con mas facilidad. A las Flautas cerradas mayores les dàn algunos de ancharia el tercio de la largaria; otros hazen que la longitud con la latitud tenga la razon de 7. con 3. otros de 8. con 3. Las Flautas menores; y singularmente las que llaman, *Nazardas*, tienen igual la longitud con la latitud.

La longitud de la ventanilla IL, fig. 15. es la quarta parte de la latitud, ò circunferencia de la Flauta; y su latitud la quarta parte de la longitud de la misma ventanilla; el segmento, ò corte que rompe el ayre, suele ser 22. grados menos, que el angulo recto.

La diferencia primera que ay entre las Flautas cerradas, y abiertas es, que siendo de vna misma longitud, la que està cerrada, suena vna Octava mas baxa que la otra; y la razon es clara, porque la cuerda del ayre, que con sus vibraciones causa el sonido, es doblada, porque no hallando salida por arriba, rebuelve hasta salir por la ventanilla, y acomoda su vibracion à toda esta longitud, doblada de la Fistula; luego consume cada vibracion doblado tiempo del que gastaria, si la Fistula estuviesse abierta: luego (9.1.) ha de formar Octava grave.

Difieren lo segundo, en que las abiertas se templan, y ajustan, si estàn sobrado baxas, cortando algo de la boca superior: y tambien se suben, ò baxan algo, dilatando, ò estrechando vn poco el mismo orificio superior; si bien esto conduce muy poco para el sobredicho efecto; pero las cerradas, se ajustan, cerrando, ò abriendo las alas, ò orejas, que para este efecto les añaden al lado de la ventanilla; pues no ay duda que las ventanillas algo mas cerradas, angostando el camino del ayre, hazen subir algo la entona-

na-

nacion, y al contrario si se abren; pero es tambien muy poco.

PROP. X. Problema.

Formar el Diapason, y Systema de las Flautas del Organo.

LA formacion del Diapason, y Systema de las flautas del Organo, consiste en determinar la longitud, y latitud de cada vna de las correspondientes à todos los puntos, è intervalos que ay dentro del Diapason: Esto se harà en la forma siguiente.

1. Escojase vna flauta para que sirva de basa, y fundamento, para determinar las demàs; la qual se debe ajustar à vn punto que sea acomodado à la voz humana, para que de esta suerte salga el Organo bien proporcionado para los acompañamientos: Esto se conseguirà si la flauta C sol fa vt se haze de dos, ù de quatro, ù de ocho pies Geometricos, poco mas, ò menos; porque consonando todas estas en Octava, si la vna es proporcionada à la voz humana, tambien lo seràn las demàs.

Determinada la longitud de vna flauta, se determinarà la longitud de todas las demàs, que entran en el Diapason de las abiertas, en la forma siguiente: Tirese sobre vna mesa larga la linea recta CH, (fig. 16.) dividase esta linea en partes harmonicas por la Tabla 3. en la misma forma que dixe en la Propos. 14. del lib. 2. en la division del Monochordo; y seràn los puntos harmonicos C. D. E. &c. y toda la cuerda CH, serà la longitud de la flauta C sol fa vt: la DH, la de D la sol re: EH, la de E la mi; y assi de las demas hasta cH, que es la longitud de la flauta C sol fa vt, que forma octava con la primera. Los intervalos de la segunda Octava c. cc. se determinaràn tomando la mitad de sus correspondientes en la primera; y assimismo los de la tercera Octava cc. ccc. se determinaràn tomando la mitad de los de la segunda; y los de la Quarta, tomando la mitad de los de la tercera.

Para determinar la latitud, ò circunferencia de todas las flautas, se tirara la CN perpendicular à CH, que sea dos quintos de la misma CH; luego se tirarà la cO, que sea

sea la mitad de cH , paralela à CN ; asimismo se tirarà la paralela XY, igual à XH; y tirando la YO, y la ON, se tiraràn à cada punto de la CH, lineas paralelas à CN , que se terminaràn en las YO , ON ; y estas determinaràn la amplitud , ò circunferencia de las flautas , y quedarà formado el Diapason ; de suerte , que CH serà la longitud de la flauta C sol fa vt ; y CN, su latitud ; DH serà la longitud de D la sol re , y la paralela que sale de punto D, serà su latitud , y assi de las demàs.

Aqui se vè claramente ser la ancharia CN menor , respecto de la altura CH , que la ancharia cO , respecto de la altura cH ; y esta menor que XY , respecto de XH ; lo que es necessario para que las flautas mayores tengan menor amplitud , respecto de su altura , que las menores ; con lo qual se evita el inconveniente de que la voz de las mayores sea sobrado ardiente , como antes dixe.

El Diapason en las flautas cerradas , se formarà de la misma manera ; solo que la proporcion de su longitud à su latitud , ha de ser diferente que en las abiertas ; porque à las mas largas dàn algunos la longitud tripla de su latitud , ò circunferencia : otros quieren sea la longitud à la latitud como 8. à 3. ò como 7. à 3. pero en las mas pequeñas , regularmente es la longitud igual la latitud , de suerte , que se forman de vna plancha quadrada ; pero en esto siempre se debe estàr à la practica de los Factores, y Maestros peritos.

CAPITULO III.

DE LOS INSTRUMENTOS CRUSTICOS, ò Pulsatiles.

INstrumentos *Crusticos, ò Pulsatiles*, son los que con la percusion, ò golpe de otro cuerpo producen su sonido : entre estos tienen el primer lugar las Campanas ; y lo que de estas se determinàre en las Proposiciones siguientes , servirà para la inteligencia de los demàs.

PRO-

PROP. XI. Problema.

Determinase la materia, disposicion, y Symmetria que han de tener las Campanas.

1. LA materia de que se componen las Campanas, es cobre fino, y estaño, los quales mezclados, hazen vn compuesto de tension proporcionada para el sonido; de la misma suerte que el temple proporciona al hierro para el arco. La proporcion de la mixtura suele ser varia en diferentes Artifices, porque vnos ponen tres, otros quatro partes de cobre, y vna de estaño Inglès: lo mas ordinario es poner 20. libras de estaño en cada 100. libras de cobre; pero la experiencia enseña, que las Campanas grandes requieren diferente mixtura que las pequeñas: algunos añaden alguna parte de plata; otros vn poco de antimonio, que dà mayor viveza al sonido; y esto se estila en las Campanas para los Reloxes; pero en todo se debe estàr à la experiencia, y prudente juizio de los Fundidores.

2. La forma de las Campanas consiste en la proporcion, y Symmetria de sus partes, la qual no guarda rigor Mathematico, pues se hallan Campanas muy buenas siendo diferente su Symmetria. Los Fundidores Italianos, como refiere el P. KirKer, le dàn la siguiente proporcion. Sea la Campana IVK, [fig. 17.] la parte que ha de tener mayor crasicie, es I, K, poco mas arriba del orificio, llamada *Batedor*, porque ella es la que recibe los golpes de la lengua: Con esta mayor crasicie, tomada con el compàs, se divide vna linea recta en muchas partes iguales, para que sirvan de pitipie: de estas partes dan 14. à la altitud RV de toda la Campana; y 13. à la maxima latitud IK, tomando 6. y media de R, hasta K, y de R hasta I, à la latitud minima OL le dàn 7. de las sobredichas partes: esto es 3. y media de S a L; y 3. y media de S à O. Otros hazen la ancharia IK de la boca, igual à la altura RV; otros, y es lo mas ordinario que se estila en España, dàn 12. à la altura, y 14. al diametro de la boca; lo que haze las Campanas muy gravosas, y de buen sonido.

La

3. La craſicie, como he dicho, no es igual en todas las partes L.X.M.K. Los Artifices de Francia, y Alemania la reparten de eſta ſuerte. La mayor es en K; y eſta viene à ſervir de pitipiè para determinar la gordaria de las demàs partes: en M à las tres partes de la altura, es dos tercios de la que ay en K; y lo miſmo en N: de ſuerte, que deſde K haſta M ſe diſminuye inſenſiblemente vn tercio: à las 9. partes de la altura, que viene à ſer en X, y en Q, tiene tres ſeptimas de la gordaria de K; de aqui haſta las 12. partes de la altura, que es en L, y en O, crece haſta ſer la mitad de K; y de aqui ſe aumenta haſta las aſas proporcionalmente, teniendo alli dos tercios de la craſicie de K. Todo lo qual ſe contiene en la Tabla ſiguiente.

Gordaria de la Campana.

En I, y en K	1 parte.
En N, y en M	$\frac{2}{3}$
En Q, y en X	$\frac{3}{7}$
EN O, y en L	$\frac{1}{2}$
En OVL	$\frac{2}{3}$

4. La lengua de la Campana ha de tener con ella cierta porporcion; porque ſi es menor de lo juſto, produce el ſon imperfecto, y ſi es ſobrado grande lleva gran rieſgo de romperſe la Campana: La Tabla ſiguiente declara la porporcion que ha de tener el peſo de la lengua con el de la Campana, que no es vna miſma en todas. Otros Artifices dererminan ſu magnitud, dandole al diametro de la lengua, en el cabo donde hiere à la Campana, vna gordaria del batedor, y vn tercio mas. Debeſe tambien tener mucho cuidado en que de tal ſuerte eſtè colocada la lengua, que venga juſtamente à herir en el batedor K, I; porque tanto que hiera mas arriba, como mas abaxo corre la Campana gran rieſgo de romperſe.

TA-

TABLA

De la proporcion que debe guardar el peso de la lengua con el peso de la Campana.

Peso de la Campana. libras.	*Peso de la lengua.* libras.	*Peso de la Campana.* libras.	*Peso de la lengua.* libras.
10	1. y med.	2000	80.
20	2.	2500	100.
30	2. y dos terc.	3000	125.
40	3. y med.	4000	140. y 145.
50	4.	5000	160.
60	4. y med.	5500	175.
70	5.	6000	190.
80	5. y med.	6500	200.
100	6. y med.	7000	220.
150	9.	7500	235.
200	12.	8000	250. y 280.
250	13.	9000	290.
300	15.	9500	295.
400	19.	10000	305.
500	23.	11000	315.
600	27.	12000	340. y 350.
700	30.	13000	370.
800	34.	14000	390.
900	37.	15000	410.
1000	42. y 44.	16000	430.
1200	46.	17000	450.
1300	48.	18000	490.
1400	52.	20000	510.
1700	63.	21000	530.
1800	67.	22000	550.
1900	75.		

PROP.

PROP. XII. Problema.

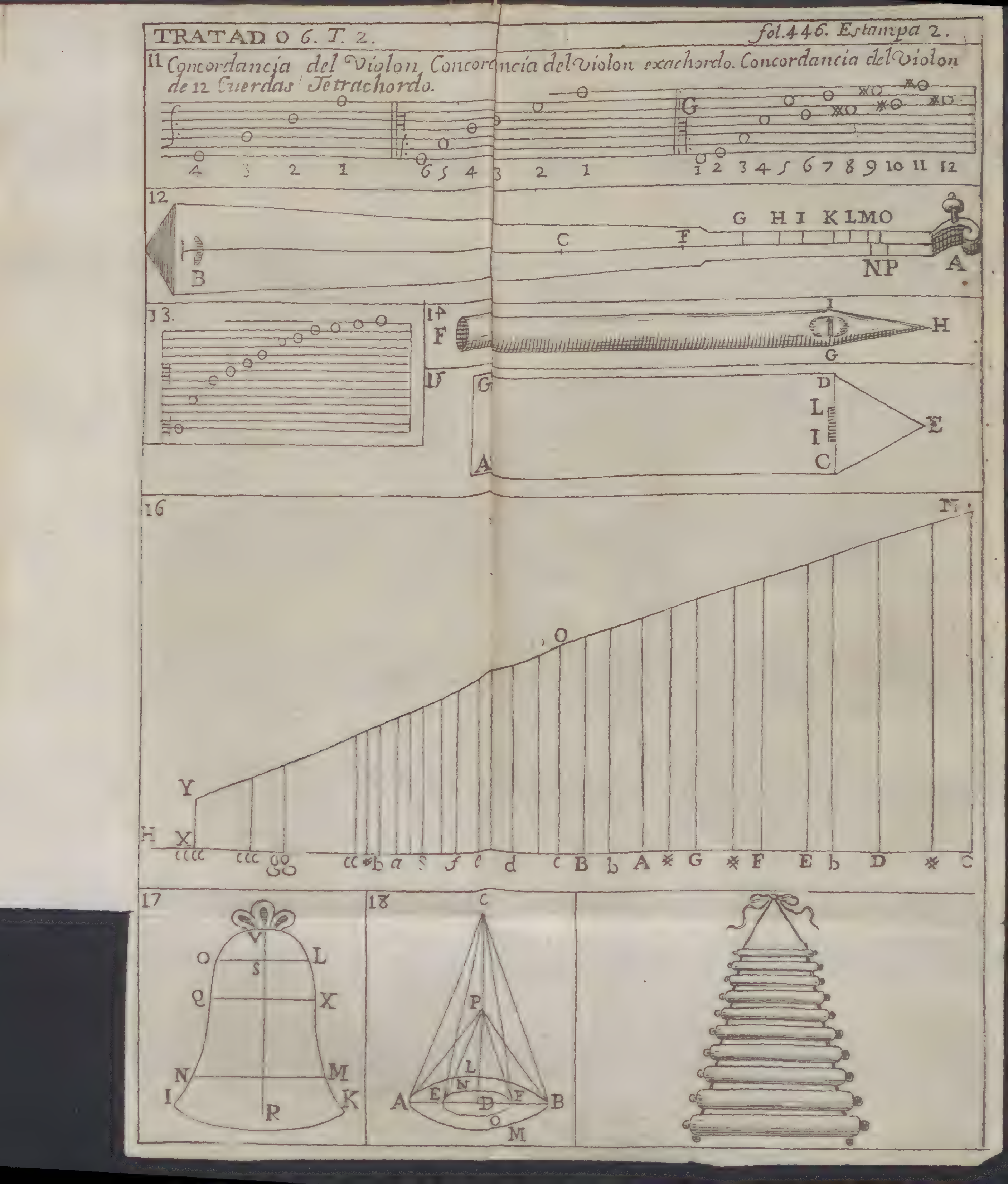
Dada la gordaria de vna Campana en el batedor, y el peso de ella, hallar la gordaria de otra Campana de qualquier peso; y al contrario, dado el peso de entrambas, y la gordaria de la vna, hallar la de la otra.

SEa vna Campana, cuyo peso es 240. libras, y su mayor crasicie en el batedor es dos dedos: pidese quanto serà el peso de otra, cuya mayor crasicie es 8. dedos?

Operacion. Cubiquense entrambas crasicies 2. y 8. y seràn los cubos 8. y 512. Hagase aora la siguiente Regla de tres: si 8. dàn 240. libras, què daràn 512? y se hallarà dàr 15360. libras; y este es el peso que se pide.

Si dado el peso de dichas Campanas 240. y 15360. y la crasicie 2. de la menor, se pidiere la crasicie de la mayor, se cubicarà la crasicie dada, y se harà la regla de tres; como 240. à 8. cubo de 2. assi 15360. à 512. cuya raiz cubica hallada por las reglas de la Arithm. Super. es 8. crasicie que se desea. Fundase esto, en que los pesos de las Campanas guardan la misma razon que sus solidezes, y estas, la misma razon de los cubos de las crasicies del batedor, como es bien claro.

Con este artificio se puede guardar el pitipie, ò escala de que vsan comunmente los Artifices, gravado en las superficies de vn paralelepipedo de alatòn, ò hierro de medio pie de largaria; porque sabiendo por experiencia la cordaria que le compete en el batedor à la Campana de vn quintal de peso, se sabrà facilmente la gordaria que le toca à qualquiera otra, dividiendo la gordaria de aquella en 10. ù en 100. partes iguales, y vsando de la regla dada; y porque el pitipie, de que vsan los Artifices, suele tener algunos defectos contrahidos de trasladarle vnos de otros, pongo en la Tabla siguiente las gordàrias del batedor, que competen à las Campanas de qualquier peso, desde la de 15. libras, hasta la de 125. quintales; supodiendo dividida en 100. partes la gordaria del batedor competente à la Campana de vn quintal de peso; y segun esta misma Tabla


11 Concordancia del Violon de 12 Cuerdas
Concordancia del violon Tetrachordo.
Concordancia del violon exachordo.
4 3 2 1
6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
12
G H I K L M O
C F
B
N P
A
13.
14
F
I
H
G
15
G
D
L
I
C
E
A
16
N
O
Y
H
X
cccc ccc gg cc b a g f e d c B b A G F E b D C
17
V
O L
S
Q X
N M
I K
R
18
C
P
L
N
A E D F B
O
M

bla ſe podrà graduar el Pitipie en la forma ſiguiente.

Tireſe ſobre vn papel vna linea recta larga à diſcrecion; y tomando con la preciſion poſsible por fundamento vna linea igual à la gordaria que le toca en el batedor à la ſobredicha Campana de vn quintal, ſe dividirà con ella en cinco, ò ſeis partes la linea que ſe tirò en el papel; y la primera de eſtas diviſiones, ſe ſubdividirà en 100. partes: Hecho eſto, ſe tomaràn de dicha linea con el compàs las partes competentes a cada Campana, ſegun ſe notan en la Tabla, y ſe iràn paſſando al inſtrumento, y quedarà graduado.

Con eſta miſma Tabla ſe puede graduar el calibre de que vſan los Artilleros, y Bombarderos, tomando el diametro de la bala de vna libra de peſo, por fundamento, aſsi como aqui tomamos la craſicie del batedor de la Campana de vn Quintal; y obrando en lo demas de la miſma manera.

TABLA

De la craſicie de las Campanas en el batedor, ſegun el peſo.

Peſo.	*Craſicie.*	*Peſo.*	*Craſicie.*
15. lib.	50.	13.	235.
1. arrob.	63.	14.	241.
2. arrob.	79.	15.	246.
3. arrob.	90.	16.	251.
Quintales.		17.	257.
1.	100.	18.	262.
2.	126.	19.	266.
3.	144.	20.	271.
4.	158.	21.	275.
5.	170.	22.	280.
6.	181.	23.	284.
7.	191.	24.	288.
8.	200.	25.	292.
9.	208.	26.	296.
10.	215.	27.	300.
11.	222.	28.	303.
12.	228.	29.	307.

Peso.	Craſicie.	Peso.	Craſicie.
30.	310.	54.	378.
31.	314.	55.	380.
32.	317.	56.	382.
33.	320.	57.	384.
34.	323.	58.	386.
35.	326.	59.	388.
36.	330.	60.	391.
37.	333.	61.	393.
38.	336.	62.	395.
39.	339.	63.	398.
40.	341.	64.	400.
41.	344.	65.	402.
42.	347.	70.	411.
43.	350.	75.	421.
44.	353.	80.	430.
45.	455.	85.	438.
46.	358.	90.	448.
47.	360.	95.	455.
48.	363.	100.	464.
49.	365.	105.	471.
50.	368.	110.	479.
51.	370.	115.	486.
52.	373.	120.	493.
53.	375.	125.	500.

En eſta Tabla ſe hallarà con facilidad la craſicie que ſe le debe dàr à vna Campana de qualquier peſo dado; y el peſo que tendrà qualquiera, dada ſu craſicie.

COROLARIO.

DE aqui ſe colige, que dado el peſo de vna Campana, ſe ſabrà facilmente ſu altura, y el diametro de ſu boca; porque ſabido ſu peſo, ſe ſabe por la Regla dada, ò por la Tabla, ò por el Pitipie, la gordaria del batedor, que es la medida con que ſe determina la altura, y el diametro ſobredicho: y por conſiguiente, ſiempre que ſe pidiere vna Campana de peſo determinado, ſe trazarà con facilidad, viendo primeramente la craſicie que le toca en el ba-

batedor;y dandole, segun esta, la altura,y amplitud à la Campana; y la diminucion competente de su crasicie, segun lo dicho en la Propos. 11.

PROP. XIII. Theorema.

Declarase el modo con que las Campanas forman su sonido.

COnsta por experiencia, que la Campana tiembla al golpe de la lengua : de que se sigue necessariamente , que recibiendo el golpe en K, fig.17. se alarga algo la boca , de suerte , que de circular se haze algun tanto elyptica ; y lo mismo sucede en todos los demàs circulos imaginables paralelos à la boca de la Campana : De este estado violento se reduce al natural por innumerables vibraciones , y estas son las que causan el sonido. Y se ha de advertir , que la Campana tañida haze muchos sonidos juntos ; pero diferentes en razon de grave , y agudo : Fundase esto en la figura que tiene la Campana,porque herida en K, vibra todo el lado VK, respecto del punto V : vibra tambien el segmento LK, respecto del punto L ; pero por ser este menor , sus vibraciones son mas breves. Tambien XK, vibra respecto del punto X ; y el segmento MK, respecto de M , tambien con vibraciones mas breves : luego de VK,sale el sonido mas grave: de LK mas agudo ; y mas de XK , &c. Si bien es verdad , que el sonido principal , es el del segmento VK : los demàs apenas se distinguen, y solo sirven de armonia, como en el Organo , donde , aunque ay en vna misma Tecla diversas flautas , que forman diferentes puntos, solo se percibe la voz de la principal , sirviendo las otras solamente de mayor armonìa.

Ni ay que dificultar el movimiento vibratorio de LK, respecto de L ; y que el mismo LK , en quanto es parte de VK,vibre con otro movimiento,respecto del punto V: porque si vna vara flexible, y corva, segun lo es VLK , se toma del cabo V, y se mueve a vna, y otra parte, à mas del movimiento de toda , con que sigue al de la mano , se incitan sus segmentos à otras vibraciones , como lo atestigua la experiencia.

PROP. XIV. Theorema.

Los fones de las Campanas, de vna mifma altura; pero de diferente bafa, tienen entre sì reciprocamente la razon fubduplicada de fus bafas; efto es, tienen la razon reciproca de fus diametros. fig. 18.

PAra mayor facilidad fupongo, que las Campanas tengan figura conica, que para el cafo prefente es lo mifmo, y que fea vno mifmo fu metal, para que por efte cabo no fe varie la razon de fu fonido. Sean, pues, dos Campanas ACB, ECF de vna mifma altura, pero de diferente bafa; y fea la bafa ALBM quadrupla de la bafa ENFO: y por configuiente (2.12.Euc.) ferà el diametro AB doblado del diametro EF. Digo, que el fon de la Campana ACB al de ECF, es como EF à AB, que es razon fubduplicada reciproca de las bafas.

Demonftr. Por tener las Pyramides ACB, ECF vna mifma altura, tienen entre sì la mifma razon que fus bafas; (11.12.Eucl.] y como los efpacios, por donde vibran eftas Campanas, ò pyramides, fean vnas pyramides concabas de igual altura, tendràn tambien eftos efpacios entre si la razon de fus bafas; teniendo, pues, los fones razon fubduplicada, y reciproca de los efpacios, como dixe en el Corolario de la Prop. 9. lib. 1. tendràn los fones de dichas Campanas razon fubduplicada, y reciproca de fus bafas: efto es, feràn reciprocamente como los diametros AB, EF de fus bafas; de fuerte, que el fon de ACB, al de ECF, ferà como EF à AB, que en efte exemplo es razon fubdupla; y por configuiente, eftaràn los fones en Octava.

PROP. XV. Theorema.

Los fones de las Campanas de igual bafa; y defigual altura, tienen entre sì la razon reciproca, y fubduplicada de las alturas. fig. 18.

SEan las dos Campanas CAB, PAB, de vna mifma bafa, pero la altura DC, fea, por exemplo, doblada de PD. Di-

Digo, que sus sones estàn reciprocamente en razon subduplicada de la que ay entre las alturas DC, y DP.

Demonstr. La Pyramide conica CAB es [14. 12. Eucl.] dupla de la conica PAB: Luego la vibracion de aquella corre doblado espacio del que corre la de esta: Luego siendo los sones en razon subduplicada de los espacios reciprocamente, estaràn los sones en razon subduplicada reciproca de dichas pyramides; pero estas son como las alturas, segun la Prop. citada de Euclid. Luego los sones tienen entre sì reciprocamente la razon subduplicada de las alturas DP, DC: y siendo estas como 1. con 2. serà el sonido de ACB ad de APB, como $\sqrt{}$.1. con $\sqrt{}$.2. que es como el lado del Quadrado con su Diagonal.

PROP. XVI. Theorema.

Los sones de dos Campanas semejantes de diferente altura, y diferente basa, tienen la razon subduplicada de las mismas Campanas reciprocamente. fig. 18.

SEan las Campanas CAB, PEF semejantes; pero sea por exemplo el Diametro AB de la basa de la mayor, doblado de EF, diametro de la menor; y assimismo la altura CD, doblada de DP: con que (12.12. Eucl.) estas Campanas, ò pyramides estàn en razon triplicada de la de los diametros de sus basas, ù de sus alturas: y siendo los diametros como 2. à 1. serà la Campana CAB, à la PEF como 8. à 1. Luego el espacio que corre con sus vibraciones CAB es octuplo del que camina PEF con las suyas: pero los sones, como queda demonstrado, tienen entre sì razon subduplicada, y reciproca de los espacios: Luego tienen razon subduplicada, y reciproca de las Campanas: esto es, el son de la Campana mayor al de la menor, en quanto à lo grave, y agudo, tiene razon subduplicada de la de 1. à 8. que es lo mismo que dezir, tiene la razon de $\sqrt{}$. 1. à $\sqrt{}$. 8. esto es, como 1. à 2. y quatro quintos, poco mas.

PROP. XVII. Problema.

Dada vna Campana, fabricar otra, que su sonido haga con el, de la primera vna consonancia dada. fig.18.

DE lo dicho en la Proposicion passada se colige el modo de hazer vna Campana, que tenga con otra la consonancia que se pidiere. Sea la Campana CAB, pidese otra que suene octava arriba con ella. *Operacion.* Tomese el diametro AB, y porque la octava consiste en la razon de 2. à 1. hagase EF, que sea la mitad de AB: hallense entre estas dos lineas dos medias proporcionales. (12.*lib.*1.*Geom.Practica.*) Hagase vna Campana semejante à la CAB, que tenga por diametro de su boca la menor de las medias proporcionales: y el sonido de esta estarà octava aguda sobre el de CAB.

Demonstr. En los quatro diametros continuos proporcionales, la Campana hecha sobre el primero, à otra semejante hecha sobre el segundo, tiene la misma razon que el primer diametro al quarto. (Consta de lo demonstrado en los Paralelepipedos, en la Prop.3. lib.11. de Eucl.) Luego como la Campana hecha sobre el primer diametro, tenga con la hecha sobre el tercero de dichos proporcionales, razon duplicada de la Campana hecha sobre el primero, à la hecha sobre el segundo; tendràn las sobredichas campanas razon duplicada de la que ay del primer diametro al quarto: esto es, tendràn en este caso razon duplicada de vna dupla: Luego estaràn en razon quadrupla: y teniendo los sones razon subduplicada de las Campanas, tendràn dichos sones razon dupla: Luego formaràn octava.

Si se pidiere vna Campana, que sobre la CAB suene diapente, cuya razon es la de 3. à 2. dividase el diametro AB en tres partes: y densele à vna otra linea dos partes de las sobredichas: hallense entre estas, dos medias proporcionales: y la Campana semejante à la ACB, que tuviere por diametro la menor de las medias, sonarà Quinta sobre ACB, y assi de las demàs.

Siguese de aqui, que se apartan de la verdad los que di-

dizen que los ſonidos de las Campanas ſon como los diametros de ſus bocas, que es en razon ſubtriplicada de las Campanas. Si bien como el ſonido pende de innumerables circunſtancias, aunque ſe guarde la dicha Regla, ſerà meneſter afinarlas al torno, ù de otra ſuerte, para que tengan la debida perfeccion. Y para que ſalgan con poca diſtancia del punto, que deben formar, y puedan afinarſe con mas facilidad, ſe fundiràn ſegun la Tabla ſiguiente, donde eſtàn determinados, ſegun la razon ſobredicha, todos los diametros, que han de tener ſus bocas, para que formen los puntos Diatonicos, y Cromaticos del Diapaſon: Ay en ella tres Octavas, para que ſe pueda fabricar vn Organo perfecto. Si alguno quiſiere ſeguir el ſentir de otros, ſuponiendo tener los ſonidos la razon miſma de los diametros, ſe podrà valer de la Tabla 3. que puſe en la Prop. 13. del lib. 2.

Las Campanas, que ſirven para componer vn Organo, ſuelen tener diferente figura, que las ordinarias: el celebre Artifice Franciſco Hemony de Lorena les daba 15. partes de diametro, y 12. de altura, y tenian prodigioſo ſonido: y tambien les daba con buen efecto 14. de diametro, y 11. de altura: y convendrà guarden todas vna miſma ſymmetria; y ſe fabriquen todas, ſi es poſsible, en vna miſma fundicion.

TABLA

Del Syſtema de Campanas, ſuponiendo los ſonidos en razon ſubduplicada de las Campanas, y el diametro de la mayor 1000.

Campanas.	*Diametro.*	*Campanas.*	*Diametro.*
ccc	250.	ff	328.
Bmi	260.	ee	342.
bfa	270.	b	351.
aa	281.	dd	367.
Suſt.	293.	Suſt.	386.
gg	302.	cc	397.
Suſt.	318.	Bmi	413.

Campanas.	Diametro.	Campanas.	Diametro.
bfa	429.	bfa	681.
a	447.	A	711.
Sust.	467.	Sust.	742.
g	480.	G	763.
Sust.	505.	Sust.	803.
f	520.	F	826.
e	543.	E	862.
b	558.	b	885.
d	582.	D	924.
Sust.	612.	Sust.	973.
c	630.	C	1000.
Bmi	657.		

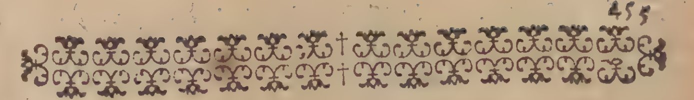
PROP. XVIII. Problema.

Explicanse algunos otros instrumentos pulsatiles.

EL otro instrumento pulsatil es el Atambor, cuyo sonido resulta de las vibraciones que haze la piel, que està estendida, y tirante sobre dicho instrumento: y pues la experiencia nos muestra ser casi del todo desproporcionado para formar consonancias, no ay para què detenernos mas en su especulacion.

Otro instrumento ay llamado *Zilorgano*: componese de vnas varillas, ò sean cylindros, ò paralelepipedos, formados de madera solida, y sonora; ò tambien de barro, que no estè muy cocido: Estas se disponen sobre vna caxa concava, de suerte, que descansen sobre dos hilos de alambre: Ponese para tañerles vn Teclado, que cada Tecla tenga vn martelito pequeño de la misma materia de las varillas, para que hiriendo con los dedos las Teclas, hieran estas con el dicho martelito las varillas: con lo que hazen vn sonido muy alegre. La proporcion que han de guardar es la misma de las flautas del Organo, que expliquè en la Prop. 10. Y se ajustan, y afinan, acortandolas para que suban à sonido mas agudo.

***



LIBRO IV.

DE LA MUSICA Practica.

TRatarè de esta materia con brevedad, pues à mas de no ser de mi profession, ay muchos Autores que escrivieron de ella difusa, y acertadamente: como Zerlino, Kir-Kero, Salinas, Cerone, y otros modernos. Contentarème, pues, con explicar, y demonstrar sus principales preceptos, para que se vea el fundamento de este Arte nobilissimo.

CAPITULO I.

DE LOS PROEMIALES DE LA MUSICA figurada.

DEFINICIONES.

DIvidese la Musica practica en *llana*, y *figurada*, que solemos llamar, *Canto llano*, y *Canto de Organo*. *Musica llana*, es aquella, cuyas notas, ò puntos proceden con igual, y vniforme figura, y medida de tiempo. Llamase tambien, *Musica Eclesiastica*, por ser la que comunmente se vsa en la Iglesia: y *Canto Gregoriano*, por su restaurador San Gregorio Papa. *Musica Figurada*, es aquella, cuyas notas, ò puntos tienen diferente figura, y desigual medida de tiempo. La primera la puede cantar vna voz, ò muchas, pero vnisonas, y con igual movimiento: La segunda la puede cantar vna voz, pero con diferentes duraciones de tiempo, segun fueren los puntos; y tambien muchas vozes, pero diferentes, tanto en razon de grave, y agu-

agudo, como en la duracion de sus puntos. Todo lo que puede conducir para la inteligencia, y practica del Canto Llano, queda explicado en el libro 2. desde la Propos. 4. Por lo qual bastarà aora tratar de lo que pertenece à la Musica figurada.

Pueden concurrir en ella dos vozes, ò tres, ò quatro, 6. 8. 12. &c. pero siempre son quatro las principales, aunque sean mas en numero. La superior, y mas aguda se llama *Tiple*: à esta se sigue el *Contralto*: luego el *Tenor*: y vltimamente la mas grave, que se llama *Baxo*. Estas quatro vozes corresponden à los quatro elementos, segun sus propriedades; el Baxo, à la Tierra, por ser el mas pesado, y de mas tardo movimiento: el Tenor, à la Agua, por caminar mas apriessa: el Contralto, al Ayre, por bolar con mayor celeridad: el Tiple, al Fuego, por su gran viveza, sutileza, è inquietud.

La medida del tiempo, por quien se nivela la detencion en cada punto, es el movimiento de la mano, levantandola, y bolviendola à Baxar, à la qual llaman los Italianos *Battuta*, y los Españoles *Compàs*. Dividese en *Binario*, y *Ternario*. El *Binario*, consta de dos partes iguales: *Elevacion* de la mano, à que los Griegos llaman *Arsin*; y *Depresion*, à que llaman *Thesin*. El *Ternario*, consta de tres partes iguales; y el mejor, y mas ayroso modo de llevarle, es, dar en la primera parte, alçar en la segunda, y acabar de alçar, ò empezar à baxar en la tercera: estilo que aora se observa en casi toda la Europa.

PROP. I. Theorema.

Explicanse las Notas, ò Puntos Musicales.

USan los Musicos en la practica del cantar de ocho notas, ò puntos, que como dixe, tienen diferente valor en la Musica figurada: esto es, tienen diferente duracion, por averse de detener mas la voz en vnos que en otros; por lo que se les dan tambien diferentes nombres, y figuras; y son: *Maxima*, *Longa*, *Breve*, *Semibreve*, *Minima*, *Seminima*, *Corchea*, y *Semicorchea*: cuya figura se vè en la pri-

primera columna de la Tabla ſiguiente, donde eſtà tambien el valor de cada vno de dichos puntos, el qual no es ſiempre vno miſmo; sì que puede tener quatro diferencias, ſegun los quatro generos de Tiempos, ò Compaſes diferentes, que regularmente ſe eſtilan: Eſtos ſon: *Compàs menor*, *Compàs mayor*; *Proporcion menor*, y *Proporcion mayor*.

El *Compàs menor*, llamado tambien *Compaſillo*, ſe denota con vna C, pueſta al principio del Pentagramma deſpues de la Clave: el valor, y propriedad, que en eſte genero de compàs tienen las notas, ò puntos referidos, es el que ſe vè en la primera columna de la Tabla ſobredicha; donde ſe manifieſta, que qualquiera de los puntos tiene dobiado valor, ò duracion que ſu inmediato ſiguiente; y aſsi, vna *Maxima*, vale tanto como dos *Longas*; vna *Longa*, tanto como dos *Breves*; vna *Breve*, tanto como dos *Minimas*, y aſsi de las demàs: De ſuerte, que la *Maxima* vale ocho Compaſes; la *Longa* quatro; la *Breve* dos; la *Semibreve* vno; la *Minima* medio; y aſsi entran dos Minimas en vn Compas: la *Seminima* vale vn quarto de Compàs; y aſsi entran quatro ſeminimas en el Compàs; la *Corchea* vale vna octava parte; y aſsi entran ocho en vn Compàs; la *Semicorchea* vale vna dezimaſexta parte; y por conſiguiente entran 16. en vn Compas.

El *Compàs mayor*, ſe nota con vna C, y vna raya que la travieſſa, pueſta tambien al principio del Pentagramma; el valor, que en eſte genero de Compàs tienen los puntos, ò figuras, es la mitad de lo que valen en el Compaſillo; y ſe podia expreſſar ſu valor con eſte ſeñal $\frac{1}{2}$. que quiere dezir, que de los puntos que en el Compaſillo entra ſolo vno en el Compàs; en eſte entran dos; y aſsi, la *Maxima* vale quatro Compaſes; la *Longa* dos; la *Breve* vno; la *Semibreve* medio; y entran dos en vn Compàs; la *Minima* vn quarto, y entran quatro en el Compàs; la *Seminima*, vna octava parte; con que entran ocho en vn Compàs; la *Corchea*, vna dezimaſexta parte; y entran 16. en vn Compàs: la *Semicorchea*, vna trigeſsima ſegunda, y entran 32. en vn Compàs, como ſe vè en la columna 2. de la Tabla.

La *Proporcion menor*, ò *Ternario menor*, ſe denota añadien-

diendo despues del señal del compasillo $\frac{3}{2}$ lo qual significa que de las figuras que en el compasillo entran dos en el compàs, en este genero de tiempo entran tres; y assi, porque en el compasillo entran dos minimas al compàs, en este genero de Ternario menor entran tres: Tambien puede llevar este señal $\frac{6}{4}$.ò $\frac{12}{8}$. que denota, que de las seminimas, que en el compasillo entran 4. al compàs; en este entran 6. y porque en el compasillo entran 8. corcheas al compàs; en este entran 12. y porque la proporcion, ò razon de 3. à 2. ù de 6. à 4. ò 12. à 8. es sesquialtera; por esto suelen llamar à este tiempo, *Proporcion sesquialtera*; y advierto, que las corcheas en este genero se pintan como semicorcheas; y las Seminimas como corcheas; y las Minimas se pintan blancas, como en el compasillo; y tambien negras, como en el mismo compasillo se pintan las Seminimas; todo esto, como tambien el valor de cada punto, se vè en la columna 3. de la Tabla, que es la *Maxima* 8. compases; la *Longa* 4. la *Breve* 2. la *Semibreve* dos tercios de compàs, por valer doblado que la Minima, que vale vn Tercio, ò tres al compàs; y por consiguiente, vna Semibreve, y vna Minima hazen vn compàs: la *Seminima*, vale vna sexta parte, ò entran 6. al compas; la *Corchea*, vna duodezima parte, ò 12. en vn compàs.

La *Proporcion mayor*, ò *Ternario mayor*, se denota con este señal, $\frac{3}{1}$. despues del caracter del compàs mayor; y significa, que de las Semibreves, que en el compasillo solo entra vna al compàs, en el Ternario mayor entran tres: el valor de los puntos, es la mitad del que tienen en el Ternario menor; y assi, la *Maxima* vale 4. compases; la *Longa* 2. la *Breve* vno; la *Semibreve* vn tercio, ò tres al compàs; la *Minima* seis al compàs, y 12. Seminimas, y 24. corcheas; pintanse como en el Ternario menor: todo lo qual se vè en la columna 4. de la Tabla. Omito algunas otras diferencias de compases, que solo sirven de confusion.

Despues de las notas, ò figuras explicadas, suele frequen-

TABLA

Del valor de las Notas Muſicales en todo genero de Compaſes.

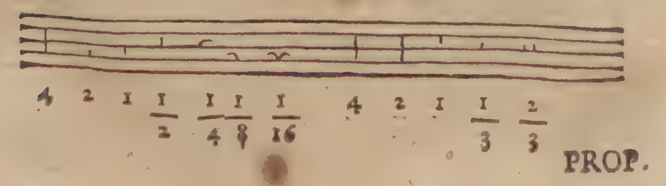
Nombres.	Notas.	Valor. en el Compaſillo C	Propriedad.	Valor. en el Compàs may. ¢	Valor. en la proporc. menor. C $\frac{3}{2}$	Valor. en la proporc. may. ¢ $\frac{3}{1}$
Maxima.		8 Compaſes.	Duerme.	4 Compaſes.	8 Compaſes.	4 Compaſes.
Longa.		4 Compaſes.	Repoſa.	2 Compaſes.	4 Compaſes.	2 Compaſes.
Breve.		2 Compaſes.	Se ſienta.	1 Compàs.	2 Compaſes.	1 Compas.
Semibreve.		1 Compàs.	Se mueve.	$\frac{1}{2}$ Compàs.	$\frac{2}{3}$ de Compàs.	$\frac{1}{3}$ de Compàs.
Minima.		$\frac{1}{2}$ Compàs.	Camina.	$\frac{1}{4}$ de Compàs.	$\frac{1}{3}$ de Compàs.	$\frac{1}{6}$ de Compàs.
Seminima.		$\frac{1}{4}$ de Compàs.	Corre.	$\frac{1}{8}$ de Compàs.	$\frac{1}{6}$ de Compàs.	$\frac{1}{12}$ de Compàs.
Corchea.		$\frac{1}{8}$ de Compàs.	Buela.	$\frac{1}{16}$ de Compàs.	$\frac{1}{12}$ de Compàs.	$\frac{1}{24}$ de Compàs.
Semicorchea.		$\frac{1}{16}$ de Compàs.	Se deſvanece.	$\frac{1}{32}$ de Compàs.		

quentemente añadirse vn punto, el qual aumenta el valor de la nota à quien se añade, la mitad de lo que vale sin el punto; y asi en el compasillo el punto despues de vna breve, le dà vn compàs mas de valor; porque valiendo dos compases, con el punto vale tres: Por la misma razon la semibreve con el punto vale Compàs, y medio: la minima con punto tres quartas de compàs; y asi de las demàs. En el ternario menor, porque la semibreve vale dos tercios de compàs, añadido vn punto, vale vn tercio mas, que es vn compàs entero; y porque en este mismo genero de compàs; la minima vale vn tercio, con vn punto vale vn sexto mas; y de esta misma suerte se ha de discurrir en el ternario mayor. Tambien advierto, que quando à vna breve en ternario mayor, y à vna semibreve en ternario menor, se les sigue figura, ò pausa igual, ò mayor, como no sea menor, ni toda negra (porque en estas no vale) la primera vale vn compàs. No me detengo mas en esto, por ser cosa que se halla explicada en muchos Autores.

A mas de las notas explicadas, que sirven para cantar, ay otras que sirven para callar, que se llaman *Pausas*; y son vnos señales, que puestos en el Pentagramma, denotan el tiempo en que el cantor debe pausar, y suspender el canto: Vease en la figura siguiente su caracter, y juntamente su valor: esto es, los compases, ò partes de compàs, en que en virtud de cada vna se debe callar; como el numero 4. significa, que la raya que le corresponde encima, es la pausa que vale 4. compases: La que està sobre el 2. vale dos compases; y asi en las demàs, y cada vna se suele nombrar con el nombre de la nota de igual valor; y asi la primera se llama, *Pausa de Longa*; la segunda, *Pausa de Breve*; la tercera *de Semibreve*, &c.

Pausas, y su valor.

En el Binario. En el Ternario.



PROP.

PROP. II. Theorema.

Explicanse los Modos, ò Tonos Musicos.

MOdo, ò *Tono Musico*, es vna idèa, y determinada disposicion de harmonia: los Griegos le llaman *Tropo*, que es lo mismo que *Figura*; y porque son diferentes las idèas, y disposiciones de harmonìa, son diferentes los Modos, ò Tonos. Concuerdan todos los Autores en que estos modos son el origen, y causa de toda variedad harmonica; y sirven en la Musica de lo mismo que en la Logica las Figuras Sylogisticas, porque assi como no ay Sylogismo bien dispuesto que no estè en vna de las Figuras Sylogisticas; tampoco ay harmonìa bien ajustada, que no se reduzga à vno de los Tonos, ò Modos Musicos.

Nace la variedad de los Tonos de las diferentes especies de Octavas, y estas se diferencian en la varia positura de los dos semitonos, que entran en su composicion. Siguese de aqui, que aviendo siete Octavas diferentes; vna de G à G; otra de A à A; de B à B; de C à C; de D à D, de E à E; y de F à F, avia de aver siete Tonos; pero pudiendose qualquiera de estas Octavas dividir harmonicamente en Quinta baxo, y Quarta arriba; y Arithmeticamente en Quarta baxo, y Quinta arriba, la qual diferencia es causa de diferente harmonìa, se infiere avian de ser catorze los Tonos; pero aviendo dos de ellos inutiles, por hallarse en la division del vno la Quinta remisa; y en el otro el Tritono, como luego verèmos: reprochardos estos, quedan doze Tonos, ò Modos Musicos.

Qual de estos doze Tonos sea el primero, qual el segundo, &c. es dificultoso el determinarlo, por aver gran variedad en los Autores; y siendo meramente question de nombre, es lo mejor ajustarse à lo que mas comunmente sienten los Practicos, que es segun el orden siguiente.

Tomèmos por primera especie de Diapente, la que ay de D hasta A; y poniendo sobre ella la primera especie de Diatessaron, que es de A à d, tendrèmos el primer Tono de D à d, como se vè en la fig. siguiente; y si debaxo del dicho Diapen-

pente ponemos el Diatesaron, saldrà el segundo Tono de A hasta a.

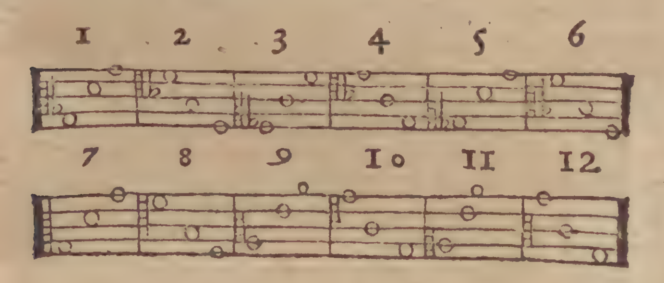
Si sobre la segunda especie de Diapente, que es de E à b duro, ò sustenido, ponemos la segunda especie de Diatesaron, que es de dicho b duro à E, tendrèmos el Tono tercero de E a e; y si ponemos el mismo Diatesaron debaxo del dicho Diapente, saldra el quarto Tono de b duro, à b duro.

Si sobre la tercera especie de Diapente, que es de F a C, ponemos la tercera especie de Diatesaron, que es de C à F, tendremos el quinto Tono de F a f; y si ponemos el mismo Diatesaron debaxo de dicho Diapente, tendrèmos el sexto Tono de C à c.

Si sobre la quarta especie de Diapente desde G à d, ponemos el Diatesaron que ay de d à g, tendrèmos el septimo Tono de G à g, y si ponemos dicho Diatesaron baxo de dicha Quinta, tendrèmos el Tono Octaxo de d à D.

Si sobre el Diapente a, e, ponemos el Diatesaron e, aa, resultarà el Tono nono a.aa; y si debaxo de dicho Diapente ponemos el Diatesaron E a, tendrèmos el Tono dezimo desde E à e.

Si sobre el Diapente que ay desde C hasta g, ponemos el Diatesaron g cc, tendrèmos el Tono onze desde c hasta cc; y si debaxo el dicho Diapente se coloca el Diatesaron Gc, tendrèmos el Tono duodezimo desde G hasta g: Todo lo qual se vè en la figura siguiente.

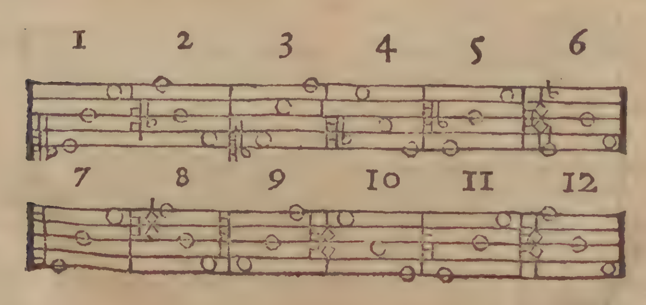


Solo nos falta declarar, porque siendo assi, que de las siete especies de Octava podian nazer catorze Tonos, admiten

miten los Musicos solamente los 12. què hemos explicado? Digo, pues, ser la causa, porque estando en el orden Diatonico, si dividimos la octava que ay de F à f, con la cuerda de b mi, sale el intervalo de F à b mi subiendo, que es tritono; y el de b mi à f, que es semidiapente, especies disonantes; y si dividimos la Octava que ay de B mi, à bmi, con la cuerda F, sale el semidiapente que ay de b mi, subiendo al fa de f; y el tritono del fa de f, al Mi de b mi; y por ser estos intervalos ilegitimos, lo son tambien los tonos 13. y 14. que se componen de ellos, y por esso no se admiten.

Dividense los tonos sobredichos en *Autenticos*, ò *Maestros*; *y Plagales*, ò *Discipulos*. Los Senares 1.3.5.&c. son Maestros, por tener la Quinta en infimo lugar: los Pares 2.4.6. &c. son Discipulos, por tener la Quinta sobre la Quarta: Llamanse aquellos *Autenticos*, por ser mejor positura la de la Quinta debaxo de la Quarta, que la de esta debaxo la Quinta.

Se han explicado los doze tonos en la Escala de B quadrado, ò dura; pero se ha de advertir, que comunmente se suelen transportar à la Escala de b mol, ò blanda, subiendoles vna Quarta; de suerte, que quedan totalmente invariados; y es la razon, porque qualquiera tono transportado ha de conservar la misma Octâva, Quarta, y Quinta con la misma distribucion, y situacion de tonos, y semitonos: Todo lo qual se conserva transportandoles de la Escala dura à la blanda, ù de Bmol, subiendo su principio vna Quarta, como se vè en la fig.



Todos los Tonos referidos, ſe vſan en el Canto de Organo; pero en el Canto Llano, ſolos los ocho primeros de la Eſcala de B quadrado; y todos eſtos ſe cantan por Natura, y B quadrado, exceptùando el quinto, y ſexto, que ſe canta por Natura, y B mol, vſando del Fa de Bfa bmi, que propriamente ſon el onzeno, y duodezimo de la Eſcala de B mol, como ſe puede vèr en la figura ſobredicha.

PROP. III. Theorema.

Explicanſe las propriedades, y efectos de los Tonos.

NO ay duda, tiene la Muſica gran poder para excitar diferentes afectos del animo; pues la miſma experiencia manifieſta, que vnos Tonos cauſan triſteza, otros alegria; vnos mueven à devocion, otros à ira, y otras paſsiones ſemejantes. No me detengo en referir varias Hiſtorias, que traen los Autores, que bien miradas, parecen increibles, ſingularmente no neceſsitando de confirmacion, lo que ateſtigua la experiencia. La cauſa de eſtos efectos de la Muſica, ſe deduce de nueſtros principios.

Conſiſte el ſonido en el movimiento tremulo del cuerpo ſonoro, y del ayre, el qual excita ſemejante temblor en los cuerpos, que por ſu tenſion, y demas circunſtancias eſtàn proporcionados para ſemejante movimiento; de que ſe ſigue el reſonar vna cuerda, ò inſtrumento, tañendo otro, con quien eſtà ajuſtado, y acorde; el temblar las ſillas, y maderos del Organo al ſon de ſus fiſtulas, como expliquè en el lib. 1. Propoſ. 10. No ay duda tampoco, en que del movimiento de las fibras ſubtiliſsimas, de que ſe compone el celebro, reſultan diferentes movimientos en los eſpiritus animales; y de eſtos, diferentes paſsiones, y afecciones del animo.

Eſto ſupueſto, digo, que tañendo, ò cantando vn tono ſe mueven las fibras del celebro con vn temblor menudiſsimo, que ſe les comunica por el Organo del oìdo; y aquellas ſe mueven mas ſenſiblemente, que por ſu tenſion, y diſpoſicion eſtan mas ajuſtadas al tono que ſe oye; con que vn tono mueve con eſpecialidad vnas, y otro otras; el que mue-

mueve las fibras, de cuyo movimiento pende el de los espiritus, que causan alegria, alegran: el que excita el movimiento de las fibras, que mueven los espiritus tristes, y melancolicos, causan tristeza: à mas de que à la manera que tiembla el agua dentro del vaso en la experiencia que dixe lib. 1. Propos. 1. tambien tiemblan los humores en los vasos que les contienen dentro del cuerpo; y qualquiera tono mueve mas sensiblemente el humor que por su natural peso està mas proporcionado à los movimientos de la voz; por lo qual, el humor vilioso, como mas leve, se mueve con los sones agudos, y apresurados; el melancolico, como mas pesado, con los tonos de mas tardo movimiento; y asi se puede discurrir en los demàs.

Los efectos, pues, que causan los 12. Tonos arriba explicados, son los siguientes: El primer Tono es apto para expressar cosas alegres, pias, y modestas: El segundo, es à proposito para versos Lyricos: El tercero, procede con severidad, y es proprio para expressar quexas, y para cosas arduas, y dificultosas: El quarto, es triste, y bueno para llanto, y cosas funestas: El quinto, es alegre, y proporcionado para cosas festivas: El sexto, es tambien alegre, y dulze, y apto para expressar afectos de alegria, y devocion: El septimo, es iracundo, y motiva semejantes pasiones: El octavo es serio, y para cosas graves, y serias: El nono, es hermoso, y ameno, y para cosas de suavidad: El dezimo, es proprio para cosas arduas: El onzeno para danças, y cosas semejantes: El duodezimo, mueve à ira, è indignacion, y es apto para cosas belicas.

PROP. IV. Problema.

Conocer à què Tono pertenece qualquiera composicion.

MUchas composiciones ay, en que los Maestros que las fabricaron, no se ciñen, ni coartan à solo vno de los sobredichos Tonos; y en estos casos no carece de dificultad el conocimiento del Tono, à que se deben reducir. La regla para conocer el Tono, es vèr la Octava que forman sus vozes, tomando de estas la mas alta, y comparandola

dola con la mas baxa, porque à aquel tono pertenecerà la composicion, dentro de cuya octava se contienen sus movimientos, teniendo mucho cuidado en la positura del semitono. Esta regla fuera indefectible, sino excedieran los dichos terminos los Maestros, vsando de los puntos de licencia.

Tambien se pueden conocer, y distinguir los tonos por la final, para lo qual se ha de advertir, que los tonos autenticos tienen su octava sobre el punto final; pero los Discipulos suelen subir vna Quinta sobre su final, y descender baxo de ella vna quarta; y segun esto, estando en la Escala dura, ò propriedad de B quadrado; el primero, y segundo tienen su final en D; el tercero, y quarto en E; el quinto, y sexto en F; el septimo, y octavo en G; el nono, y dezimo en A; y el vndezimo, y duodezimo en C: y cantando por B mol, terminaràn el primero, y segundo en G; el tercero, y quarto en A; el quinto, y sexto en bfa; el septimo, y octavo en C, el nono, y dezimo en D; y el vndezimo, y duodezimo en F: todo lo qual se vè en la fig. preced. donde se manifiesta, que los tonos autenticos tienen su final en el punto mas baxo de los tres que alli se expressan, y los Discipulos en el del medio. Debense tambien atender las clausulas, que se hazen mas frequentemente en cada tono, porque por ellas con solo el oido, se podrà hazer juizio de su naturaleza.

CAPITULO II.

DE LAS REGLAS GENERALES PARA el Contrapunto, Conciertos, y Composicion.

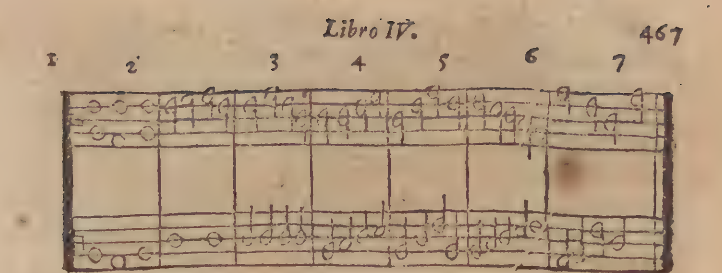
AUnque este nombre *Contrapunto* puede generalmente convenir à qualquiera mixturà de vozes diferentes en razon de grave, y agudo, contrapuestas entre sì; esto no obstante, suelen distinguirse tres diferen-

cias en dicho concurso, y contraposicion de vozes: porque, ò estas son solamente dos, llevando la vna de ellas el Canto Llano; y esto es lo que comunmente se llama, *Contrapunto*; ò son mas de dos, llevando tambien vna de ellas el Canto Llano; y esto es lo que llaman *Conciertos*, à tres, ò à quatro vozes, &c. segun fueren las que concurren: ò son assimismo mas de dos, sin que aya de llevar ninguna de ellas el Canto Llano; y esto es lo que llaman *Composicion.* De todo se tratarà con brevedad.

PROP. V. Theorema.

Explicanse los movimientos que pueden hazer las vozes contrapuestas.

LOS movimientos que las vozes contrapuestas pueden tener en qualquiera de los sobredichos concursos, son primeramente de tres maneras: *Recto*, *Obliquo*, y *Contrario.* Movimiento *Recto*, es, quando las notas, ò figuras de vna voz, ò sea el Tiple, ò el Baxo, proceden sin mudar la cuerda, ò signo: *Obliquo*, quando, ò las dos vozes suben, ò las dos baxan: *Contrario*, quando la vna voz sube, y la otra baxa. Cada vno de estos puede ser por grados, ò por saltos. *Movimiento recto por grados*, es, quando persevera el Baxo, ò el Tiple en vna misma cuerda, y la otra voz sube, ò baxa *gradatim*, como en el exemplo siguiente, num. 1. y 2. *Movimiento recto por saltos*, es, quando perseverando el baxo en vna cuerda, la otra voz sube, ò baxa por saltos, como en 3. *El movimiento obliquo gradatim*, es, quando entrambas vozes suben, ò baxan *gradatim*, como en 4. *Movimiento obliquo por saltos*, es, quando vna, y otra voz suben, ò baxan por saltos, como en 5. *Movimiento contrario gradatim*, es, quando el movimiento contrario de las vozes se haze de grado en grado, como en 6. *Movimiento contrario por saltos*, es, quando entrambas vozes hazen por saltos los movimientos opuestos, como en 7.



PROP. VI. Problema.

Reglas generales para el Contrapunto, Conciertos, y Composicion.

LAs Reglas en esta materia son vnas generales, y otras particulares: Las generales se deben observar regularmente en todo genero de composicion, y contraposicion de vozes: Las particulares sirven para casos particulares, y assi se explicaran en su caso, y lugar. Pero antes de todo se ha de suponer, que las especies de intervalos que se vsan en la Musica son: *Vnisono*, *Segunda*, *Tercera*, *Quarta*, *Tritono*, *Quinta*, *Sexta*, *Septima*, *Octava*, y sus compuestas: De estas ay cinco consonantes, que son el *Vnisono*, *Tercera*, *Quinta*, *Sexta*, y *Octava*: Las demas son disonantes; porque aunque la Quarta en si sea consonante, pero en quanto à su vso en el contrapunto, y composicion, es lo mismo que si fuera disonante, como dixe en el Escholio al lib. 1. De las consonantes ay tres perfectas, que son el *Vnisono*, *Quinta*, y *Octava*; y assimismo lo son sus compuestas: Las demas son imperfectas. Esto supuesto, las Reglas generales son las siguientes.

1. Nunca se pueden dar dos perfectas, como dos Octavas, ni dos Quintas, ni dos Vnisonos inmediatamente subiendo, ò baxando las vozes: La razon es, porque falta la variedad tan necessaria para la harmonia; pero dos consonancias imperfectas pueden seguirse inmediatamente, como son dos Terceras, ù dos Sextas, sean mayores, ò menores; aunque siempre es mejor, que despues de la Tercera mayor se siga la menor, y al contrario; y lo mismo en las Sextas.

2. En los concursos de dos, ò tres vozes, quando el Canto Llano, ò el Baxo sube, y el contrapunto, ò voz superior baxa, se puede dàr la Quinta, pero no la Octava: Y al contrario, quando el Baxo, ò Canto Llano desciende, y el contrapunto sube, se puede dàr la Octava, y no la Quinta: y de esta suerte puede seguirse la Octava à la Quinta, y esta à la Octava: Pero concurriendo quatro vozes, guardaràn esta regla las vozes intermedias; pero la Quarta, ò superior puede dàr la Quinta, ò la Octava, tanto al dàr, como al alzar el compàs, subiendo, ò baxando entrambas vozes: lo qual es propria postura de quarta voz.

3. Assi el principio, como la final del canto ha de ser en especie perfecta; porque seria cosa muy desabrida empezar en imperfecta, y muy desayrada fenecer en ella: y assi se avrà de empezar vn Vnisono, ò en Octava, ò en Quinta, y en essas mismas consonancia, se avrà de terminar; sì bien la final se puede hazer en Tercera mayor, y mucho mejor en Dezena mayor, aunque en la voz superior se ponga vn sustenido. Todo lo dicho se observarà puntualmente quando ay solas dos vozes; pero àviendo mas, bastarà guarden dichas reglas la voz superior, y el Baxo; porque las intermedias tienen mas licencia, y amplitud.

CAPITULO III.

DEL CONTRAPUNTO.

PROP. VII. Theorema.

Explicase el Contrapunto, y sus diferencias.

Contrapunto, es vna artificiosa contraposicion de dos vozes, que causan vna suave, y dulce harmonia. Dividese en varias especies: Primeramente en *Contrapunto suelto*; y en *Ligado*, ò *Syncopado*. *Contrapunto suelto*, es el que se forma sin ligadura, ni syncopa. *Ligado*, ò *Syncopado*, es el que vsa de la ligadura, y syncopa: con esta se ligan las disonancias de tal suerte entre dos consonancias, que aquellas se buel-

buelven plausibles, y estas mas agradables. Consiste la ligadura, ò syncopa, en que la duracion de la vna voz alcance dos notas, ò puntos de la otra, entrando parte en la vna, y parte en la otra, como verèmos despues en los conciertos: Todo se harà patente en los exemplos que se daràn despues.

A mas de lo dicho, se distingue el contrapunto en otras muchas especies; las mas principales son: Contrapunto à *Semibreves*, que tambien se llama *Sencillo*: Contrapunto à *Minimas*: Contrapunto à *Seminimas*, llamado comunmente *de Compasillo, y Florido*: Contrapunto de *Campàs mayor*: Contrapunto a *Sesquialtera*: el qual es en dos maneras: el vno à 6. ù de 6. à 4. y otro à 9. ù de 9. à 6. que algunos con gran impropriedad llaman *Sesquinona*. Todas las dichas especies se pueden formar sobre Baxo, y sobre Tiple; y de todas se tratarà en particular.

REGLAS

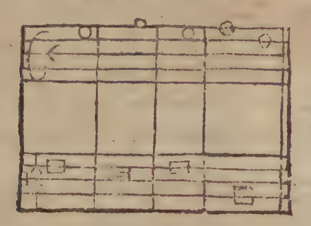
Del Contrapunto suelto.

EN el contrapunto suelto se deben observar las reglas generales dadas en la Prop. 5. y las siguientes. 1. El principio, y final del contrapunto ha de ser en especie perfecta, como en Octava, ò Quinta; las imperfectas se pueden vsar en qualquiera otro lugar. 2. Las especias disonantes se pueden dàr; pero observando por la regla general que no vengan al dàr, ni al alzar el compàs, porque esto no es permitido de otra suerte que con ligadura, como se dirà despues.

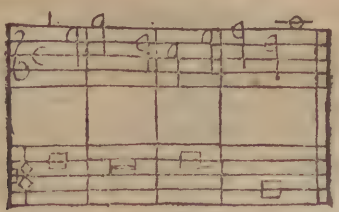
PROP. VIII. Problema.

Formar el Contrapunto à Semibreves, y à Minimas.

EL *Contrapunto à Semibreves* consiste, en que à cada punto de Canto Llano, corresponde otro de contrapunto de igual valor, sin variedad alguna de figuras, como se vè en el exemplo siguiente.



El *Contrapunto à Minimas* consiste, en que à cada punto del Canto Llano corresponden dos minimas en el contrapunto. Las reglas particulares que se han de observar en este contrapunto son las siguientes: 1. Ha de comenzar el contrapunto con pausa de minima, para que pueda el contrapuntante tomar tono oyendo el Canto Llano: y advierto, que todos los demas contrapuntos de figuras menores han de empezar con pausa por la misma razon. 2. Al alzar el compas se puede dar qualquiera especie consonante, sea perfecta, ò imperfecta, como se vè en el exemplo siguiente.



PROP. IX. Problema.

Formar el Contrapunto de Seminimas, ù de Compasillo: y el de Compàs mayor.

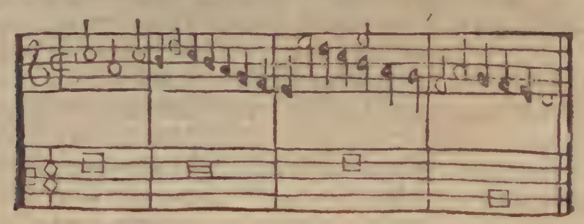
EL *Contrapunto de Seminimas, ù de Compasillo*, es el que se compone de seminimas, minimas, y algunas semibreves: debe observar, à mas de las generales, las reglas siguientes: 1. Las seminimas sirven para hazer carreras, baxando, ò subiendo seguidamente sin salto alguno. 2. Basta se dèn con ellas especies consonantes al dar, y al alzar el compàs. 3. Para dàr principio à las carreras descen-

den-

dentes, se ha de cuydar no cogerlas de salto, si al dàr el compàs, y procediendo la primera seminima de dicha carrera, de otra figura semejante, ù de minima antecedente con puntillo, ù otra parte de figura, que equivalga por seminima: Puedese tambien principiar la carrera antecedente con minima syncopa, con tal, que en medio de dicha minima syncopa alze, ù dè el compas: Las carreras ascendentes pueden empezar de qualquiera manera, tanto al dàr, como al alzar; pero no con minima syncopa, porque esto desaira el Contrapunto. 4. Todas las carreras, assi ascendentes, como descendentes, han de finar al dàr el compàs. 5. Las semibreves en este Contrapunto, sirven para siempre, que se aya de hazer ligadura, ò clausula: què cosa sean ligadura, y clausula, y el modo de hazerlas, se dirà despues: solo advierto, que en este solo puede aver ligadura de septima. Vease el exemplo siguiente.

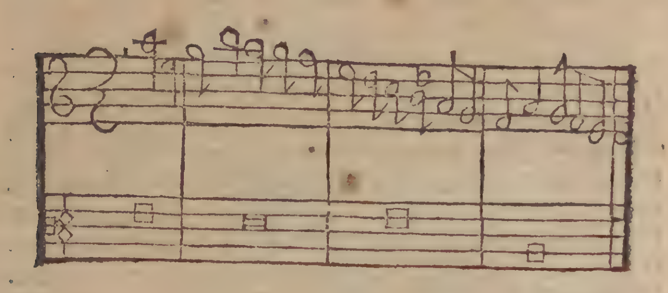


El Contrapunto de compàs mayor, consiste en lo mismo que el de Compasillo, y solo se diferencia, en que entran en el de compàs mayor doblado numero de figuras al compas; vsa de las mismas que el Compasillo; y entra con pausa de vna minima, como en el exemplo siguiente.



De la misma suerte se formaràn estas especies de con-

trapuntos en el Compàs Ternario, sin mas diferencia que en el valor de las figuras, segun lo dicho en la Propos. 1. Vease el exemplo siguiente, que es de proporcion, ò Ternario menor.



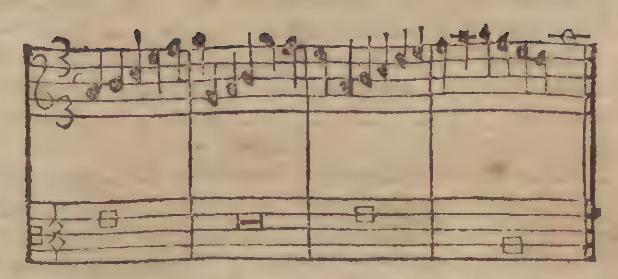
PROP. X. Problema.

Formar el Contrapunto à sesquialtera.

Contrapunto à sesquialtera, es el que se compone solamente de seminimas, cantando en cada punto de el Canto Llano, tal numero de ellas, que guarde proporcion sesquialtera con el numero de las que se cantan en otro genero de compàs; y assi es principalmente en dos maneras, el vno à seis, y el otro à nueve; en aquel se cantan seis seminimas en cada punto de Canto Llano, sobre el qual solo se cantan quatro en el compasillo; en el de sesquialtera à nueve, se cantan nueve seminimas sobre cada punto del Canto Llano, sobre el qual, en el Ternario menor se cantan seis.

En la sesquialtera à seis, se guardan las reglas siguientes. 1. Forçosamente ha de aver tres seminimas consonas; y estas han de ser la en que dà el compàs, la en que alza, y otra qualquiera: advirtiendo, que quanto mas huviere buenas, tanto mejor serà el Contrapunto. 2. Quando se ofrece el saltar, se ha de despedir de especie buena, y ha de ir à especie buena. 3. Entrase en este Contrapunto, como en los demàs con pausa equivalente à vna de las figuras que incluye. Vease el exemplo siguiente.

En



En la ſeſquialtera à nueve. 1. Ha de aver quatro, ò cinco ſeminimas buenas; y tanto ſerà mejor, quanto mas fueren las buenas. 2. Entran ſeis al dàr, y tres al alçar; y ſe entra con pauſa, como en el antecedente: Veaſe el exemplo ſiguiente.



Advierto, que la ſeſquialtera à ſeis puede ſer doble; y entonces ſe llama *à doze*: la qual no ſe diſtingue de la que llamamos à ſeis en otro, que en vſar de otras figuras de doblado menos valor que las ſeminimas, como ſon las Corcheas de las quales en eſta eſpecie de contrapunto ſe ponen 12. en vn compas; aſsi como en el de à ſeis entraban ſeis ſeminimas.

PROP. XI. Problema.

Explicaſe el modo de formar otras eſpecies de Contrapunto.

A Mas de las ſobredichas ay otras eſpecies de contrapunto, que aunque mas dificultoſas, las forman los Muſicos dieſtros con las miſmas reglas que los antecedentes. El primero es el que llaman, *Contrapunto ſobre Tiple*, el qual conſiſte, en que la voz del Tiple lleva el Canto Llano, y

la

la voz del Baxo forma el Contrapunto. Puedense echar sobre Triple las mismas diferencias de Contrapuntos, que sobre el Baxo, y con las mismas reglas, advirtiendo, que la quinta se ha de dàr quando sube el Contrapunto, y baxa el Canto Llano; y la octava al contrario, qnando sube el Canto Llano, y baxa el Contrapunto.

Puedese tambien echar el Contrapunto sobre Canto de Organo, de la misma manera que sobre el Canto Llano, formandole, ò sobre el Triple, ò sobre el Baxo, ò sobre el Contralto, ò Tenor. Lleva consigo mayor dificultad este genero de Contrapunto, aunque se forma con las mismas reglas, porque quando se forma sobre Triple, se vsa de las mismas que acabo de dezir, para quando el Triple lleva el Canto Llano: quando se echa sobre el Baxo, se observan las mismas de las Proposiciones passadas: quando se forma sobre el Contralto, ò Tenor, puede subir la voz del Contrapunto ya sobre la del Contralto, ò Tenor; y à baxar debaxo de ellas, segun le pareciere al contrapuntante, pero quando se hallare el Contrapunto sobre las vozes dichas, guardarà en las especies perfectas las mismas leyes que en el Contrapunto sobre el Baxo; y quando se hallare debaxo de ellas, guardarà las mismas que en el Contrapunto sobre Tiple. Juzgo bastarà lo dicho para el conocimiento de las principales especies del Contrapunto suelto; y assi no me detengo mas en ello.

Seguiase aora el tratar del Contrapunto ligado, ò syncopado; pero como suponga la noticia de la syncopa, y ligadura, que se contiene en el Capitulo siguiente, difiero su explicacion para el Capitulo 5. donde juntamente se explicaràn los conciertos, y composicion.

CAPITULO IV.

DE LA PRACTICA, Y USO DE LAS Disonancias en la Musica.

ASSI como la mezcla de lo claro, y obscuro dà perfeccion à la pintura, assi la artificiosa mixtura de las con-

consonancias, y disonancias haze mas agradable la harmonia; y assi como la mayor destreza del Pintor consiste en saber distribuir la luz, y la sombra con insensible, y proporcionada degradacion; assi la mayor habilidad del Musico estriva en entretexer las disonancias de tal suerte con las consonancias, que con maravilloso dissimulo passe de las vnas à las otras, imitando en esto à la naturaleza, cuyo admirable artificio consiste en la trabazon, y ajuste de las contrarias qualidades de quatro elementos, que siendo tan opuestos entre sì, se ajustan de tal suerte, que con su acorde vnion componen la maravillosa fabrica de los mixtos, como cantò Ovidio.

......corpore in vno.
Frigida pugnarent calidis, humentia siccis:
Mollia cum duris, sine pondere habentia pondus.

Debe, pues, el Compositor entretexer en la contraposicion de las quatro vozes, no solamente lo blando con lo fuerte, y lo grave con lo agudo, si tambien mezclar con dissimulacion lo consono con lo disono, observando lo que se explica en las Proposiciones siguientes.

PROP. XII. Problema.

Explicase el modo primero, con que se puede vsar de las disonancias en la Musica.

DE dos maneras se pueden vsar las disonancias en la Musica, la vna es passando por ellas con velocidad, de suerte, que no se pueda advertir su mal efecto, y la otra es por ligadura, que las dissimule, y haga plausibles: Explico el modo primero en esta Proposicion, dexando para despues el segundo.

Digo, pues, lo primero, que en la compassion, aunque sea de solas dos vozes, se pueden dàr las disonancias en qualquiera parte, mientras no vengan al dàr, ni al alzar el compas, como dixe en el cap. 3.

Lo segundo puede darse tambien la especie disonante al alzar el compas, mientras se detenga en ella muy poco la

la voz, y la toque solamente como de passo para la especie buena, à quien inmediatamente viene con el mismo movimiento; y en semejantes casos no es la especie buena la que alli supone, como dizen los Musicos, si la consonante, à que luego passa: admitese esto por la breve detencion que haze la voz en la especie disonante, que no dà lugar à que se perciba su mal efecto.

Es lo sobredicho permitido tanto en caso que el movimiento sea de ambas vozes, como de vna sola; pero se ha de advertir, que la voz que glossa, esto es, aquella que canta dos, ò tres, ò mas puntos por vno solo, no ha de ir à la especie mala por salto, porque en toda voz que salta, la especie de que se despide, y à la que và han de ser buenas; aunque se le podrà permitir este salto à la voz que no lleva la glossa: fundase esto, en que moviendose la glossa de grado, y brevemente por la especie mala, no percibe el sentido su desazon, aunque la otra voz vaya a ella por salto. Fuera de estos casos, para vsar de las disonancias, se ha de proceder como explico en las Proposiciones siguientes.

PROP. XIII. Problema.

Explicase el segundo modo de vsar las disonancias en la Musica.

EL segundo modo con que se vsan las disonancias en la Musica es la *Ligadura*, con la qual se puede dàr qualquiera disonancia en puesto principal del compàs, en cuya recta disposicion consiste el buen gusto, y primor de la Musica. La ligadura requiere tres condiciones; es a saber, *Prevencion*, *Syncopa*, *y Salida*. La *Prevencion*, consiste en prevenir el puesto donde se ha de hazer la syncopa, ò ligadura, antes de hazerla: La *Syncopa*, consiste en la colocacion de vna figura semibreve, ò minima entre dos figuras, de suerte, que venga à alzar el compàs. La *Salida*, consiste en salir, ò transitar de la falsa, ò especie disonante à especie consonante imperfecta; y porque con este artificio se ata, ò liga la disonancia con la consonancia, se llama *Ligadura*, con la qual queda la disonancia como ligada, è impedida, para que no cause el mal efecto, que por si sola causarias

ſaria; antes bien entretiene el ſentido, haziendole deſear la conſonancia que deſpues percibe con mas guſto, quando ſale à ella. Las reglas que ſe han de obſervar ſon las ſiguientes.

La *Prevencion* puede ſer en eſpecie conſonante perfecta, ò imperfecta, y tambien en diſonante: en todo caſo ha de hazerſe la prevencion, caminando de la conſonancia mas proxima à la diſonancia con movimiento por grados, y no por ſalto; y quando ſe haze la prevencion en eſpecie diſonante, no ha de ſer por movimiento de ambas vozes; sì ſolo de vna, exceptuando en la quinta remiſa; en quien ſe permite hazer la prevencion con el movimiento de entrambas. La *Ligadura* ſiempre ha de ſer en eſpecie diſonante, haziendo ſyncopa, como dirè deſpues. La *Salida* ha de obſervar, lo primero, que ſea à eſpecie conſonante imperfecta, y la mas cercana. 2. Que ſea baxando de grado à la dicha imperfecta, y jamàs por ſalto. 3. La imperfecta à que ſale, ſi no ſe haze clauſula puede ſer mayor, ò menor, pero haziendo clauſula, ſiempre ha de ſer la imperfecta mayor, como tercera mayor, ò ſexta mayor.

PROP. XIV. Theorema.

Explicaſe la naturaleza, y condiciones de la Syncopa.

S*yncopa*, ſegun Cerone, es vna ſuſpenſion de voz en medio de compàs, que ſucede quando en medio de vna figura ſe canta otra, y anda ſuſpenſa deſde la mitad de la figura, que hiere en compas, ò en medio compàs; de modo, que la figura que anda ſuſpenſa es la que no hiere en compàs, ſino en el medio del compas; y en menos palabras, ſegun el P. KirKer, conſiſte la ſyncopa en la colacion de vna figura ſemibreve, ò minima entre dos notas, ò figuras, de ſuerte, que vengan al alzar el compàs. En la ſyncopa ſe han de obſervar eſtas dos condiciones. 1. Que no admite ſyncopa otra figura, si ſolamente la ſemibreve, y minima: las mayores que eſta no la admiten por ſu tardanza, y las menores por ſu ſobrada celeridad. 2. Que la figura ſyncopada ſea de doblado valor que la inmediata ſiguientes

te; como à la semibreve syncopada se le debe seguir vna minima, ò dos seminimas, que valen tanto con vna minima.

La syncopa se puede hazer de dos maneras, primeramente sin mezcla, ni intervencion de disonancias, como es ordinario en las composiciones, aun de vna sola voz; pero esta es syncopa impropria. Lo segundo se puede hazer con intervencion de disonancias, y esta es la propria syncopa de que hablamos en este lugar. En este genero de syncopa, y ligadura ay vna voz que està queda, sin moverse hasta la salida, y otra que se mueve; la que se mueve, se dize *padecer en especie disonante*; y la otra es la que haze padecer à esta.

PROP. XV. Problema.

Declarase el modo con que se ligan las disonancias en particular.

LAs especies disonantes que se hallan en ligadura son seis; es a saber, *Segunda*, *Quarta*, *Tritono*, *Quinta remisa*, *Septima*, y *Novena*. De estas especies la *Segunda*, *Quarta*, y *Septima*, convienen en que pueden ligar, aviendo prevenido antecedente en especie consonante, ò disonante, y pueden desligar, ò salir en qualquiera de las dos especies imperfectas; y ninguna de ellas puede hazer la prevencion con movimiento de entrambas; pero la *Quinta remisa* puede prevenir la ligadura con movimiento de entrambas vozes; y no puede salir, ò desligar sin que mueva el baxo, ni en otra especie que en Tercera; y en el *Tritono*, y *Nona* no se puede hazer la prevencion para ligar en disonancia alguna, por llevar consigo sobrada aspereza.

Coligese de lo dicho, que la *Segunda* syncopada, sale bien à Tercera mayor, ò menor, passando de ella a la Quinta, ò Octava, y lo mismo se ha de entender en la *Novena*, que es su compuesta. La *Quarta* sale a Tercera, passando à la Quinta, y pocas vezes sale bien a la sexta. Lo mismo digo de su compuesta. El *Tritono*, y *Semidiapente* salen à Tercera. La *Septima* sale bien a la Sexta, passando luego à Octava. Mas abaxo se daran algunos exemplos, quan-

quando ſe tratarà de la practica de los conciertos, y composicion.

PROP. XVI. Problema.

Determinanſe los intervalos, con que ſe pueden cubrir las Diſonancias.

EL cubrir, y diſsimular las diſonancias, conſiſte en añadir otras vozes que hagan conſonancia con cada vna de las que ſon diſonantes entre sì; de lo qual reſulta vn compueſto conſono, y agradable al oìdo; y es la razon, porque las dos vozes diſonantes, aunque hieren con deſconcertadas vibraciones al oìdo, y tardan mucho en vnir ſus apulſos; pero cada vna de las dichas cuerdas, junta con las añadidas, procede con vniformidad en ſus temblores, vniendo las vnas, y las otras con brevedad ſus vibraciones, con que ſon muchos mas los golpes que hieren concertadamente al oìdo en aquel tiempo, en que tardan à vnirles las cuerdas diſonantes; de que ſe ſigue impedirſe lo aſpero de la diſonancia, y venir à guſtar el oìdo de vna agradable harmonìa, tanto mas guſtoſa, quanto compueſta de mayor variedad; y por eſta miſma cauſa ſe buelven apacibles las diſonancias diſsimuladas con la ligadura.

Y aunque algunas de las eſpecies diſonantes, quando ſe ligan, no neceſsiten de otra voz que las acompañe, como ſon la Segunda, y Septima; pero por la regla general ſiguiente ſe determinan los intervalos conſonos, aptos para cubrir qualquiera diſonancia, y aun algunas conſonancias imperfectas, que aunque no lo neceſsiten, pero ſe les añade mayor ſuavidad, y harmonia. Tomenſe los numeros proprios de la diſonancia que ſe ha de cubrir, y buſquenſe los numeros conſonos, que proximamente ſe ſiguen a cada vno de los ſobredichos: veaſe la conſonancia que expreſſan, y eſta ſerà la que diſsimula, y cubre la diſonancia; eſto ſe haze facil con la practica ſiguiente.

Para cubrir la *Segunda*, tomeſe ſu proporcion propria, que es 9. à 8. Ponganſe eſtos numeros como aqui ſe

ſe vè : Hallenſe los que tanto en cima como debaxo 12
ſe ſiguen proximamente ; pero que hagan intervalo 10
conſono con alguno de los diſonantes, y ſe hallaràn 9
ſer 10.12.6. De que infiero cubrirſe bien la ſegunda 8
con qualquiera de los intervalos ſiguientes. 1. Con 6
vna tercera mayor ſobre la voz mas baxa, como lo
indica 10. con 8. ò 5. con 4. y aunque eſto ſon dos ſegundas juntas ; pero ajuſtadas con la Preparacion, Syncopa, y ſalida hazen buen efecto. 2. Se cubre la ſegunda con la Quinta ſobre la voz baxa, que es la razon de 12. à 8. 3. Con la miſma Quinta pueſta debaxo la voz alta, como lo ſeñalan los numeros 9. à 6.

La *Quarta*, conſiſte en la razon de 4. à 3. los numeros
proximos à eſtos ſon 5. arriba, y 2. abaxo, como aqui 5
ſe vè: De que ſe colige cubrirſe con vna Quinta pueſ- 4
ta debaxo la voz inferior, y tambien con vna Sexta 3
mayor pueſta ſobre la miſma voz inferior. 2

El *Tritono*, conſiſte en la razon de 45. à 32. cuyos numeros proximos ſon como aqui ſe vèn ; y por que
entre 45. y 32. ſe halla el 36. y la razon de 45. à 54
36. es la miſma de la Tercera mayor, ſe podrà cu- 45
brir el Tritono con la Tercera mayor, colocada ba- 36
xo la voz ſuperior. Sobre el 45. eſtà el 54. y por- 32
que la razon de 54. à 45. eſto es, de 6. à 5. es la Tercera menor; ſe ſigue, que las Terceras pueden cubrir el Tritono, que juntas forman vna Quinta, que es la razon de 54. à 36.

La *Septima menor*, conſiſte en la razon de 9. à 5. Pueſto, pues, entre eſtos numeros el 6. tenemos 6. con 5.
Tercera menor; 9. con 6. Quinta ; y ſi añadimos à la 12
parte de baxo vn 4. es 5. con 4. Tercera mayor; y 6. 9
à 4. Quinta; y añadiendo 12. à la parte de arriba, te- 6
nemos el 12. con 9. Quarta; y aſsi concluyo que con 5
las conſonancias ſobredichas ſe cubrirà la Septima 4
menor.

La *Septima mayor*, conſiſte en la razon de 15. à 8. Entre eſtos terminos caben los numeros 10. y 12. El 10. con el 8. es Tercera mayor ; 15. con 10. es Quinta ; con que

con

con la Tercera mayor, y la Quinta ſe puede diſsi- 20
mular la Septima mayor. Tambien el 12. con el 8. 15
es Quinta; y el 15. con 12. es Tercera mayor, que 12
ſon las miſmas conſonancias con otra diſpoſicion; 10
pero en la practica ſe vſa pocas vezes de la Septima 8
mayor.

La *Sexta menor*, es de 8. à 5. entre eſtos numeros ſe ha-
lla el 6. que con el 5. haze Tercera menor; y 8. con
6. Quarta: Tambien ſi debaxo del 5. ponemos 4. ſe- 12
rà la razon de 5. à 4. Tercera mayor. Tambien po- 10
niendo 10. ſobre el 8. ſerà la razon de 10. a 8. otra 8
vez Tercera mayor; y ſi ponemos el 12. ſerà 12. à 6
8. Quinta; y con eſtas conſonancias ſe harà mas 5
agradable la Sexta menor. 4

La *Sexta mayor*, conſiſte en la razon de 5. à 3. Ponga-
ſe, pues, en medio el 4. y ſerà la razon de 4. à 3.
Quarta; y la de 5. à 4. Tercera mayor, que es lo 10
miſmo que la Quarta cubierta, como antes dixe: 8
Tambien ſi ponemos debaxo vn 2. tendrèmos 3. à 6
2. Quinta; 4. a 3. Quarta; y 4. à 2. Tercera mayor; y 5
5. a 2. Dezima; que todas ſon buenas poſturas. Con 4
los numeros de encima ſe hallaran otros intervalos 3
aptos para lo miſmo. 2

CAPITULO V.

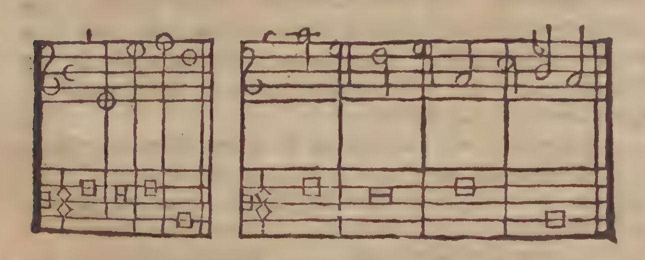
DE LOS CONCIERTOS, Y COMPOSICION.

AViendo explicado en los capitulos antecedentes lo mas eſſencial que ſe requiere; aſsi para el contrapunto ligado, como para los conciertos, y compoſicion, explicarè aora brevemente las reglas principales, con que lo ſobredicho ſe debe reducir à practica, remitiendo al Lector, que deſeàre mayor extenſion en eſta materia à los Autores, que como propria de ſu profeſsion la tratan mas por extenſo.

PROP. XVII. Problema.

Formar el Contrapunto ligado.

EL Contrapunto ligado añade ſolamente ſobre lo dicho en el Capitulo 3. del Contrapunto ſuelto el vſo de las ligaduras; y aſsi baſtaràn los dos exemplos ſiguientes: el primero, de Semibreves; y el ſegundo, de Minimas.



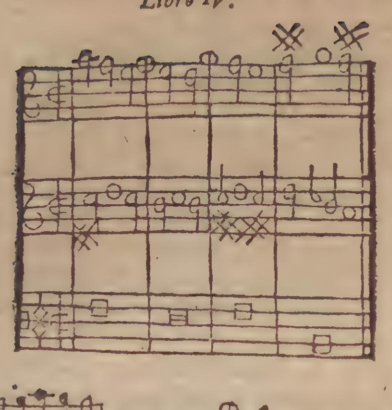
PROP. XVIII. Problema.

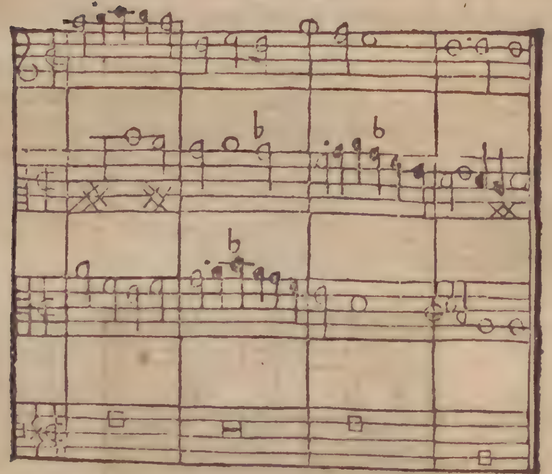
Explicanſe las diferencias de los conciertos, y ſu formacion.

LOS conciertos, como en otra parte dixe, ſon vnos concurſos de mas de dos vozes ajuſtadas ſobre vn Canto Llano; y aſsi pueden ſer à tres, à quatro, à cinco, y mas vozes: Puedenſe tambien formar ſobre Baxo, y ſobre Tiple: para ſu acierto ſe obſervarà lo ſiguiente.

Los conciertos, ſingularmente ſi ſon à tres, han de entrar en paſſo, imitandoſe las vozes en ſus movimientos; y ſerà mucho mejor, ſi el paſſo fuere ſiguiendo ſobre todo el Canto Llano. Se haràn tambien ligaduras, y clauſulas, aſsi de Quarta, como de Septima; en lo demàs ſe guardaràn las Reglas generales dadas en la Propoſ. 6. Veanſe los dos exemplos ſiguientes.

PRO-





PROP. XIX. Problema.

Reglas que se deben observar en la composicion.

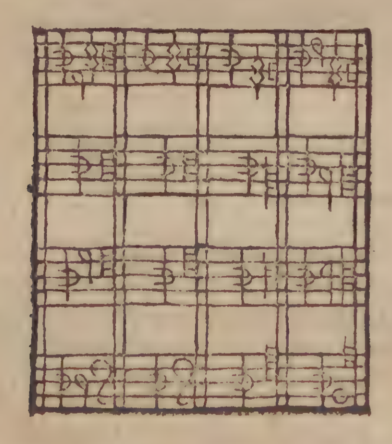
COmposicion es una artificiosa colocacion de diferentes vozes con variedad de consonancias, y disonancias, sin que sea menester llevo alguna de ellas el Canto Llano. Es la composicion el fin a que se encamina todo lo que hemos dicho

del

del Contrapunto, por ser este el principio, y origen de la composicion: Pueden en ella concurrir tres, quatro, seis, ocho, y mas vozes; pero siempre son quatro las principales, para cuya disposicion à mas de las reglas dadas en la Prop. 6. y las demàs, se observarà lo siguiente.

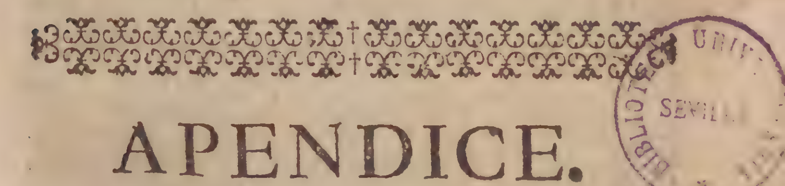
1. Considerese el texto, y letra sobre que se compone; procurese ajustar la Musica à los afectos que expressa, haziendo eleccion de aquel Modo, ò Tono que fuere mas proporcionado para dicha expression: usando tambien de aquellas notas, y figuras que mas concuerdan con la letra; y segun esto, à vezes serà acertado usar de figuras tardas, à vezes de velozes, y otras vezes de pausas; cuidese tambien no corresponda nota larga à silaba breve, porque es grande fealdad, singularmente quando por essa causa se varia el acento.

2. Dispónganse los Pentagrammas, tantos como huviere vozes en la composicion, con las claves, y demàs notas, segun requiere el Tono elegido, como se vè en la figura siguiente, en la qual, la disposicion del orden primero, es para b mol natural; la del segundo, para B quadrado natural; la del tercero, para B quadrado transportado; y la del quarto, para b mol tranportado.



3. Cons

3. Compongase en primer lugar el Baxo, si no se diere yà compuesto, el qual debe proceder con intervalos mayores, como son Quartas, Quintas, y Octavas, huyendo quanto se pueda del vnisono, y Terceras. En este se ha de poner mucho cuidado, porque siendo el fundamento de las demàs vozes, tales seràn estas, qual fuere el Baxo; despues se compondràn sobre èl las demàs vozes con intervalos menores, y figuras de menos valor que las del Baxo, mezclando los intervalos consonos con los disonos, segun las reglas dadas. No me alargo mas en esta materia por ser fuera de mi profession.



APENDICE.

AVIENDO concluìdo este Tratado, me ha parecido añadir la noticia de algunas curiosidades pertenecientes à la Musica, que si bien algunas de ellas parecen paradoxas, pero todas tienen solido fundamento, y se deducen de la doctrina que hemos explicado.

§. I.

Imposible es son sensible, que estè en la parte grave 15. Octavas.

LA razon es clara, porque para la formacion de este son, seria menester vna cuerda, cuya longitud se estendiesse mas de vna legua. Como se verà si suponemos vna cuerda de vn piè de larga: porque si esta se duplica, tenemos el son de vna octava baxo: y si esta segunda cuerda se duplica, tendremos el sonido de dos octavas: vayase, pues, multiplicando continuamente por dos, hasta que se

llegue con esta progression dupla à 15. terminos, y el termino dezimoquinto, que serà 32768. pies, serà la longitud de la cuerda, que con la misma tension sonaria quinze octavas mas baxa que la cuerda de vn pie: y porque 5. pies hazen vn passo, partiendo la dicha cantidad por 5. salen 6553. passos, y 3. pies: y porque mil passos hazen vna milla, partiendo 6553. passos por mil, seràn seis millas, y 553. passos, que son mas de dos leguas, y media de à tres millas, que es mucho mas de vna legua Española. Siendo, pues, esta cuerda tan larga, su movimiento vibratorio seria tardissimo, y por consiguiente inepto para impeler el ayre, de suerte, que pudiesse inmutar el oìdo, y causar sòn sensible. Siguese de aqui, que la cuerda que avia de formar 37. octavas mas baxo, que el son de la cuerda de vn pie, llegaria su longitud desde el centro de la tierra, hasta mucho mas alto que el Sol, segun el calculo del Padre Mersenno: porque prosiguiendo la progression dupla en la forma dicha, es el termino 37. el siguiente 136.631.247.872. y tantos pies en longitud avia de tener la dicha cuerda, distancia mayor que la del Sol. Y estando à la observacion del mismo Padre Mersenno, de que vna cuerda de tres pies, por espacio de vn segundo de tiempo haze 1728. vibraciones, se sigue, que la cuerda dicha, que tendria de largo 136. 631. 247. 872. para hazer vna vibracion gastaria diez y seis años, y 3. meses. Donde se vè, que aquel movimiento insensible con que las plantas crecen, es mas velòz, que el movimiento que tendria la dicha cuerda.

§. II.

Possible es vn duo, que vna sola voz le cante.

PArece paradoxa, y no tiene dificultad: Compongase vn duo de suerte, que las vozes vayan en fuga perfecta repitiendo la vna lo mismo que la otra: y espere la segunda à la primera, medio compàs, ò vn compàs, segun pareciere mejor. Vayase el Cantor à vn lugar donde se forme vn eco bueno, y claro, y cuide ajustar el compàs à la tardanza del eco en responder, de suerte, que la espera que ay al

principio, venga justa à lo que el eco tarda en bolver la voz: y se seguirà, que cantando la primera voz el Musico, responderà el eco, quando el mismo entonarà la segunda; y el eco la segunda, quando el Musico la tercera; y como la voz del eco sea la misma del Musico, que buelve por reflexion, se verifica, que vna sola voz canta las dos que componen el duo.

§. III.

Possible es, que vn sordo ajuste perfectamente vn instrumento musico à otro.

SUpongamos que vna Guitarra se ha de ajustar à otra, que estè yà bien templada: Digo, que vn sordo la puede ajustar de esta manera: Tome vna pajuela leve, y doblandola, pongala sobre la primera cuerda de la Guitarra templada, de suerte, que no toque en cosa alguna, si solo en la cuerda: Despues de esto taña en la Guitarra, que pretende ajustar, la cuerda correspondiente, subiendola, ò baxandola, hasta que vea se mueve, y tiembla la pajuela, la qual no se moverà hasta que la vna, y la otra cuerda estèn ajustadas; haga lo mismo en las demàs cuerdas, y quedaràn todas ajustadas con las de la otra Guitarra, y por consiguiente entre sì. Y como para esto solamente se necessita de la vista, podrà muy bien el sordo acordar ambos instrumentos.

§. IV.

Modo para oìr vn sonido de muchas, y grandes Campanas, sin Campana alguna.

TOmese vn hilo de qualquiera materia, y en medio dèl pongase pendiente vna lamina, ò vara de metal, que sea muy tremula; y tomando los dos cabos del hilo, vno con la mano derecha, y el otro con la izquierda, se emboleràn en la extremidad del dedo indice; y poniendo estos dedos dentro de ambos oìdos, de suerte, que queden cerrados, quedarà pendiente la lamina en el ayre, sin que se arrime a cosa alguna; y estando de esta suerte, se le daràn algunos golpes, y se oirà vn sonido como de vna gran cam-

pana. Y si se toma vna vara larga de hierro, y se haze la misma experiencia, atandola con vn hilo largo, se percibirà vn grande, y admirable sonido, compuesto de grave, y agudo. Y si qualquiera de estos cuerpos sonoros se tiene pendiente dentro de vna cisterna, se oirà vn gran ruido, compuesto de diferentes sones. La razon de esto es, porque el temblor del metal se comunica por la cuerda à los oidos, y mueve el tympano, y al ayre incluìdo en èl con grandes, y vehementes vibraciones.

§. V.

Puede la Musica aprovechar mucho para la Medicina.

BIen vulgar, y sabido es, que para las mordèduras de la Tarantula es vnico, y eficàz remedio la Musica, como yà lo dixo vn Poeta: *Musica sola mei superest medicina veneni.* De tal suerte, que como enseña la experiencia, vnas requieren vn tono, y otras otro: y al oìr los que se hallan inficionados con tal veneno, el son proporcionado, se sienten movidos à saltar, y baylar, y con la agitacion de los desusados, y violentos movimientos que hazen, se evapora con el sudor aquel pestilencial veneno, que de otra suerte les quitàra la vida.

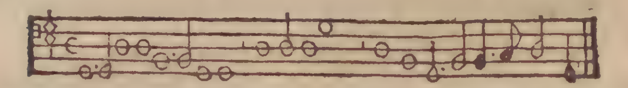
No ay duda, que el motivarles la Musica à aquellos saltos, y movimientos consiste, en que al temblor de las cuerdas, tiemblan, y se estremecen en las venas la sangre, y demàs humores, entre los quales està mezclado el veneno de la Tarantula; y este movimiento interior les instiga à los saltos, gestos, y demàs movimientos exteriores. Infiero de aqui, que puede aprovechar mucho la Musica para curar, ò por lo menos mitigar muchas enfermedades, y facilitar su curacion. Lo primero, porque consistiendo la enfermedad en el desconcierto, y perturbacion de los humores, y aviendo vnos sonidos que mueven mas vn humor que otros, no ay duda podrà el dicho sonido moverle, è incitarle à movimiento contrario del que era la ocasion del daño. Lo segundo, porque los malos humores con el movimiento que extrinsecamente les comunica la Musica, seràn

ràn mas faciles de expeler, ayudando à la facultad la Medicina con algun medicamento proporcionado.

Para proceder en esto con feliz sucesso, es menester averiguar con repetidas experiencias, què efecto haze qualquier tono, en diferentes enfermedades; y observar cada genero de musica, què humor mueve con mas singularidad, y què afectos causa en los hombres segun sus diferentes temperamentos: Juzgo ser cosa que pide mucha solicitud, y experiencia, y entiendo surtirian mejores efectos de la Medicina, ayudada de tan dulce medicamento.

§. VI.

ME ha parecido dàr fin à este Tratado con vn tono llamado *Canon*, en el qual cantan con admirable harmonia 36. vozes, repartidas en 9. Coros, correspondientes à los nueve Coros de los Angeles, repitiendo las mismas vozes con que estos alaban eternamente à Dios: es obra de Michaelio Romano, Musico insigne, y se halla en el Padre KirKer en el lib. 7. de su Musurgia, cap. 5. Es el siguiente.



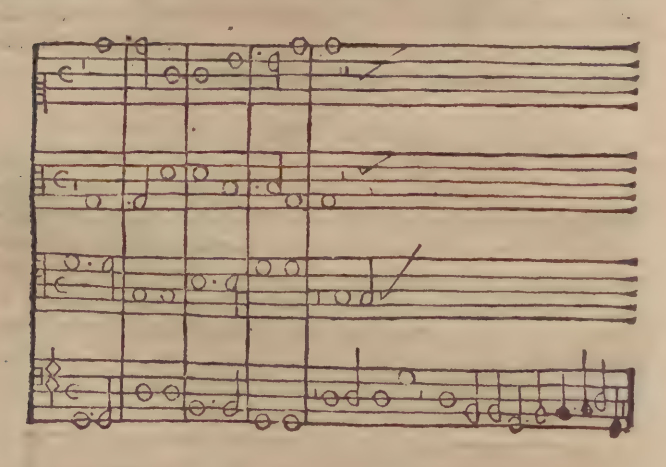
Sanct. Sanct. Sanct. Sanct. Sanct. Sanct. Sanct. Sanct. Sanctus.

El Baxo empieza llanamente como se vè pintado. El Tenor empieza juntamente con el Baxo, pero vna duodezima mas alto, y procede por contrarios movimientos. El Contralto empieza vn compàs despues, y vna octava sobre el Baxo. El Tiple empieza juntamente con el Contralto, y vna dezimanona sobre el Baxo, y por contrarios movimientos, como se vè mas abaxo. Y estas quatro vozes forman el primer Coro.

Las quatro vozes del segundo Coro cantan de la misma suerte que las antecedentes; y lo mismo en los demàs Coros: con esta diferencia, que

El

El ſegundo Choro entra deſpues de 2. compaſes. El tercero, deſpues de quatro. El quarto, deſpues de 6. El quinto, deſpues de 8. El ſexto, deſpues de 10. El ſeptimo, deſpues de 12. El octavo, deſpues de 14. El noveno, deſpues de 16. Y ay en eſta compoſicion vna coſa que admirar, y es, que no ay voz alguna, que jamàs ſe halle en vniſono con otra, coſa bien frequente en la compoſicion de muchas vozes.





INDICE

DE LOS TRATADOS, LIBROS, y Capitulos que en este Tomo segundo se contienen.

TRATADO IV.

DE LA ARITHMETICA Superior.

TRA.

TRATADO V.

DE LA ALGEBLA, O ARTE *Analytica.*

Cap.I.

lores

TRATADO VI.

DE LA MUSICA ESPECULATIVA, y Practica.

F I N.

